

В данной статье приведены основные формулы вариационного метода расчета тонкостенных стержней закрытого профиля, основанного на применении функционала Лагранжа. Используются основные положения метода [1-4], ранее использованного для определения напряженно-деформированного состояния стержней различной формы. Учитываются сдвиги и депланация, возникающие при деформациях изгиба и кручения. Принимаются основные допущения теории стержней Тимошенко и теории тонкостенных стержней закрытого профиля Уманского [5-7]. Для описания напряженно-деформированного состояния стержней используются следующие гипотезы: 1. Справедлив закон Гука. 2. При деформировании, продольные волокна стержня не взаимодействуют друг с другом в перпендикулярных к ним направлениях (гипотеза ненадавливания). 3. Поперечные сечения стержня, плоские до деформации, после деформации изгиба и растяжения-сжатия остаются плоскими. 4. Напряжения и деформации, связанные с изгибом в плоскости, проходящей через главную ось поперечного сечения стержня, постоянны по ширине сечения. 5. Составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к профилю поперечного сечения (к срединной поверхности) стержня равны нулю (гипотеза безмоментности). 6. Составляющие касательных напряжений, параллельные касательной к профилю поперечного сечения стержня, постоянны по толщине стенки (гипотеза о равномерном распределении касательных напряжений). 7. Профиль стержня в плоскости поперечного сечения при кручении перемещается как абсолютно твердое тело (гипотеза неизменяемости контура). 8. При кручении появляются перемещения в направлении продольной оси стержня, возникает депланация поперечного сечения. Для описания напряженно-деформированного состояния стержня введем декартову систему координат Ox, Oy , с осью Ox , перпендикулярной к плоскости поперечного сечения (рис. 1). Обозначим через e_x, e_y – орты этой системы координат. На срединной поверхности поперечного сечения стержня, введем локальную декартову систему координат Ox', Oy' , с осями Ox', Oy' , направленными по касательной и по нормали к профилю стержня (рис. 1). Обозначим орты этих осей $e_{x'}, e_{y'}$. Полагаем $e_x = e_{x'}$. В системе координат Ox, Oy (1) Здесь $\cos \alpha, \sin \alpha$ – направляющие косинусы осей Ox', Oy' . Справедливы равенства: $e_x = \cos \alpha e_{x'} + \sin \alpha e_{y'}$, $e_y = -\sin \alpha e_{x'} + \cos \alpha e_{y'}$ (2). Для описания перемещений и деформаций используем векторы перемещения и углов поворота поперечного сечения стержня: u, v (3) где u, v – перемещения в направлении осей Ox, Oy , α – углы поворота поперечных сечений стержня относительно этих осей. С учетом равенств (3) и принятых гипотез, возникающие при изгибе и растяжении - сжатии перемещения точек в поперечном сечении стержня u, v , в направлении осей Ox, Oy , определяются по формулам: $u = \int \epsilon dx$; $v = \int \gamma dy$. 4) При кручении, в плоскости поперечного сечения стержня возникают перемещения u, v , связанные с поворотом и перемещения в направлении продольной оси w , обусловленные с депланацией сечения. Полагаем $w = \int \gamma dx$ (5) где w – перемещения в направлении осей Ox, Oy и (рис.1). В соответствии с гипотезой неизменяемости контура, при кручении тонкостенный стержень в плоскости

поперечного сечения поворачивается как абсолютно жесткое тело. Следовательно, для точек профиля (на линии пересечения срединной поверхности стержня с поперечным сечением) вектор может быть представлен в следующем виде [7]: . Здесь - вектор перемещения точки поперечного сечения (рис. 2), которая называется центром кручения; - компоненты вектора в системе координат; - вектор углов поворота сечения вокруг оси проходящей через полюс и параллельной оси , - вектор, проведенный из полюса в точку профиля. Выполняя операцию векторного умножения, находим . (6) Приравнивая правые части соотношений (5), (6), получаем Умножая это уравнение скалярно на вектора и , определяем перемещения в направлениях осей и : С учетом формул (1), (2) находим (7) В дальнейшем полагаем, что полюс совпадает с началом системы координат Охуз. Следовательно , . С учетом этих равенств формулы (7) принимают следующий вид: (8) Так как принята гипотеза о равномерном распределении касательных напряжений по толщине стенки, можно считать, что перемещения , точек , лежащих на оси (), такие же, как и для точки . Следовательно, для точек, координаты которых вычисляются по формулам , (9) полагая в левой части формул (8) , получим (10) Считаем, что модули упругости и сдвига материала являются переменными величинами, зависящими от длины дуги линии (рис.2): . В соответствии с теорией тонкостенных стержней Уманского [5-7] деформация сечения при кручении описывается функцией , (11) где - функция меры деформации; . (12) Здесь (- периметр профиля), - длина перпендикуляра, проведенного из начала координат Охуз к касательной к линии в точке (рис. 2); - осевой момент инерции поперечного сечения при кручении, - толщина стенки; - секториальная характеристика (площадь) профиля. При растяжении-сжатии, изгибе и кручении тонкостенного закрытого профиля в направлении нормали к поперечному сечению возникают перемещения вызванные растяжением-сжатием, изгибом и деформацией сечения при кручении: . Подставляя в это равенство выражения (4), (11), находим . (13) Деформации и напряжения будем вычислять в системе координат . Используем формулы теории упругости: ; . (14) Обратим внимание на то, что по формулам (14) вычисляются деформации в фиксированной точке и в фиксированной локальной системе координат . В этом случае, в точке (рис. 1, 2), следовательно . С учетом этого равенства и выражений (2), (12), (10), (13) получаем , (15) Подставляя формулы (15) в (14), находим выражения для компонент деформаций , (16) . Учитывая принятые гипотезы безмоментности и неизменяемости контура, следует полагать $\epsilon_{\theta} = 0$, . В соответствии с гипотезой ненадавливания, продольные волокна стержня не взаимодействуют в нормальном по отношению к ним направлениям, следовательно, нормальные напряжения в направлении осей , равны нулю: . Таким образом, в поперечном сечении тонкостенного стержня возникают напряжения , ; (17) Формулы (16), (17) справедливы для точек поперечного сечения стержня, лежащих на оси , т.к.

для них также выполняется равенство . Координаты точек, лежащих на оси () вычисляются по формулам (9). Координаты некоторой фиксированной точки на линии обозначим через (), а длину дуги, которая соответствует точке () - . В соответствии с равенствами (9) - . Следовательно, с учетом соотношений (16), (17) для точек (), лежащих на оси , ; (18) . Для расчета напряженно-деформированного состояния стержневой системы может быть использован вариационный принцип Лагранжа: . (19) Здесь – вариация потенциальной энергии деформации системы, – вариация работы внешних сил. Потенциальная энергия деформации стержня в точках Вариация потенциальной энергии деформации (20) В точках (), вариация работы внешних сил, распределенных по длине и по площади поперечных сечений стержня , (21) где – проекции внешних сил, действующих в поперечном сечении с площадью А, на оси координат , , . Подставляя в (21) выражения для перемещений (10), (13), получим (22)

Учитывая, что , а величины являются проекциями внешних сил на оси координат , , по формулам , , , вариацию работы внешних (22) можно представить в следующем виде: (23) . (23) Для стержня длиной , с площадью поперечного сечения , , . (24) Интегралы , будем вычислять с использованием численного интегрирования. При этом , . (25) Здесь - весовые множители, зависящие от используемой для численного интегрирования квадратурной формулы, размеров и формы поперечного сечения. С учетом равенств (23), (20), (24) (25), получается ; (26) Полагая в последнем выражении , , , , , вариацию работы распределенных по длине стержня внешних сил , моментов и бимоента можно представить в следующем виде: Аналогично, для сил сосредоточенных сил , приложенных в точках продольной оси стержня с координатой и моментов, , действующих в точках с координатой , вариация работы сосредоточенных внешних сил

Следовательно, вариация работы распределенных и сосредоточенных в точках внешних сил + (27) Для выбранной системы координат , усилия и моменты в поперечных сечениях стержня вычисляются по формулам: , , , (28) , , Эти величины являются интегральными характеристиками и вычисляются достаточно точно при использовании соотношений для деформаций в виде (16). Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня можно вычислять на основе закона Гука по формуле: . Использование же закона Гука (17) для определения касательных напряжений позволяет определять достаточно точно только интегральные характеристики. Для более точного вычисления значений касательных напряжений в точке М поперечного сечения стержня (рис. 2,3) следует использовать формулу, полученную на основе уравнений равновесия выделенного элемента стержня. В частности, в монографии [7] представлена формула для вычисления в случае, когда оси , являются главными центральными осями поперечного сечения и полюс Р (рис. 2) совпадает с центром изгиба – центром кручения