Целью исследования является определение напряженного и деформированного состояния балки при упругопластическом плоском изгибе. Принято, что материал балки отвечает модели упругопластического тела с линейным упрочнением. Истинная диаграмма растяжения материала представляется ломаной линией, состоящей из двух прямолинейных участков. На начальном упругом участке деформация чисто упругая и справедлив закон Гука: , (1) на втором – участке упрочнения – напряжение и деформация связаны зависимостью . (1 а) В этих формулах и – напряжение и деформация в произвольной точке сечения, – предел текучести, – предел прочности, значение которого принято равным истинному напряжению в момент начала образования «шейки», и – соответствующие деформации, – модуль упругости, – безразмерный модуль упрочнения. Для рассматриваемого здесь примера взяты такие значения этих величин: МПа. МПа, ГПа, . Сначала рассмотрим задачу чистого изгиба, когда в произвольном сечении балки поперечная сила равна нулю, а затем – более сложную задачу поперечного изгиба, используя и результаты решения первой задачи. 1. Чистый изгиб. Пусть поперечное сечение балки – прямоугольник , длина , один конец балки жестко защемлен, а к другому – свободному – концу приложен сосредоточенный момент . Тогда в любом сечении изгибающий момент При решении задачи примем во внимание изменение формы и размеров поперечного сечения балки и оценим его влияние на результаты расчета. При изгибе одна часть балки испытывает сжатие, другая – растяжение. В сжатой части балки поперечное сечение расширяется, а в растянутой – сужается. В результате форма сечения изменяется, превращаясь из прямоугольника в трапецию. Нейтральная ось смещается к широкому основанию трапеции. Без учета этого эффекта [1], [2], принимая гипотезу плоских сечений, деформацию волокна с ординатой можно определить по формуле (2) где – деформация волокна, наиболее удаленного от нейтральной оси. Изгибающий момент в сечении определяется интегралом . (3) Подставив в уравнение (3) напряжения из уравнений (1), выраженные из уравнения (2) через , можно получить зависимость максимальной деформации от изгибающего момента: где , в нашем случае , безразмерный изгибающий момент, – момент сопротивления изгибу. С учетом малости отношения уравнение можно несколько упростить: . (4) Это уравнение решено численно методом Ньютона при различных значениях изгибающего момента . Результаты приведены на рис. 1 в виде графика зависимости максимальной деформации от изгибающего момента (кривая 1). Рис. 1 – Зависимость максимальной деформации от изгибающего момента: 1 – без учета, 2 – с учетом изменяемости сечения В работе [3] упомянутый выше эффект изменения поперечного сечения учитывается следующим образом. При рассмотрении статической стороны задачи добавляется еще одно уравнение – условие отсутствия нормальной силы в поперечном сечении: (3а) а уравнение (3) существенно изменяется в связи с тем, что распределение напряжений уже не симметрично относительно нейтральной оси. Подставив в статические уравнения (3) и (3а) физическое соотношение в форме (1а) и геометрическое соотношение , (2а) получим следующую систему уравнений, которые связывают неизвестные величины: максимальную продольную деформацию и высоту сужающейся части поперечного сечения , определяющую положение нейтральной оси, – с заданным изгибающим моментом и известными механическими характеристиками материала: (5) (6) где обозначено: Заметим, что в этих уравнениях в работе [3] имеются опечатки, которые здесь исправлены. Рис. 2 – К численному решению системы уравнений (5) и (6) Систему уравнений можно решить численно одним из двух способов: а) как в работе [3], сначала выразив неизвестное из уравнения (5), исключить его из уравнения (6) и решить затем одно уравнение с одним неизвестным ; б) решить непосредственно систему уравнений (5) и (6). Рассмотрим подробнее этот, второй, способ. Представим уравнения (5) и (6) в форме и , построим их графики (рис. 2). Корнями системы являются, очевидно, координаты точки пересечения этих графиков – точки . Найдем ее методом последовательных приближений. Задавшись первым приближением абсциссы , найдем точки и , при заданной абсциссе кривой ордината ее находится методом Ньютона с использованием частной производной или . Затем проводим касательные к кривым и , для чего определяем производные где частные производные функций, определяемые также численно как отношение приращения функции на заданном малом шаге к величине этого шага. Находим точку пересечения касательных : составляем уравнения прямых, проходящих через точки и с угловыми коэффициентами и , и, решая полученную систему уравнений, определяем координаты точки : (7) После этого производится проверка условия где – допустимая погрешность. Расчет продолжается по приведенному алгоритму до выполнения этого условия. По описанному алгоритму составлена программа на языке «Fortran 90», выполнены расчеты при различных значениях изгибающего момента, результаты приведены на рис. 1 (кривая 2). Для сравнения результаты двух расчетов – без учета и с учетом изменения поперечного сечения – показаны на одном графике. Как видно, они несколько отличаются. В работе [2] было показано, что пренебрежение этими изменениями приводит к некоторому завышению несущей способности и жесткости. Так при чистом изгибе балки предельный момент с учетом изменяемости сечения получается меньше на 8 процентов, а угол поворота свободного конца на 11 процентов больше, чем при обычном расчете. График зависимости максимальной деформации от изгибающего момента можно представить кусочно-линейной диаграммой, состоящей из трех характерных участков: · I участок, , деформация чисто упругая, максимальная деформация прямо пропорциональна изгибающему моменту , (8) нейтральная ось проходит посредине сечения (9) · II участок , деформация упругопластическая, зависимость максимальной деформации от изгибающего момента линейная (10) нейтральная ось смещается в сторону сжатых волокон балки (11) · III участок, , упругопластическая деформация, линейная зависимость (12) положение нейтральной оси . (13) 2. Поперечный изгиб. Рассмотрим однопролетную балку на двух шарнирных опорах с силой посредине. В поперечном сечении возникают касательные напряжения, кроме того, расчет усложняется переменностью изгибающего момента по длине балки. Предположим, что поперечные сечения остаются плоскими, несмотря на наличие деформации сдвига, то есть пренебрежем влиянием касательных напряжений, тогда можно считать, что любой элемент балки находится в состоянии чистого изгиба и справедливы соотношения (8) – (13). Рассмотрены два случая закрепления балки. А) Балка (рис. 3) закреплена так, что ее среднее сечение может перемещаться только вертикально, а два концевых сечения – только горизонтально, таким образом, среднее сечение является плоскостью симметрии деформированной балки и угол поворота его равен нулю. В этом случае изгибающий момент в произвольном сечении . Рис. 3 – Прогиб балки на подвижных шарнирных опорах Независимой переменной при численном решении задачи является дуговое расстояние текущей точки изогнутой оси от опоры, а координата – длина ее горизонтальной проекции , где – угол поворота сечения. В безразмерном виде формула изгибающего момента записывается так: (14) где , а . Приведем кратко алгоритм численного решения задачи. Задаются начальные значения: угла поворота на левом конце балки , где и – нижняя и верхняя границы возможного диапазона изменения , длины дуги изогнутой оси , абсциссы сечения , прогиба и угла поворота . Длине дуги дается малое приращение , после чего вычисляются новые значения абсциссы и прогиба , ; здесь же определяется изгибающий момент по формуле (14). После этого по формулам (8) – (13) находятся значения максимальной деформации и относительной высоты и определяется кривизна по формуле , затем находится угол поворота в конце первого шага: . Так расчет продолжается до достижения середины балки, где выполняется проверка условия симметричности изогнутой оси: при угол поворота должен равняться нулю. Если с заданной точностью это условие выполнено, то расчет прекращается, если нет – то производится корректировка начального угла поворота на левом краю: если , то изменяется нижняя граница начального угла поворота , и, наоборот, если , то ; вычисляется новое значение начального угла поворота . Результаты расчета приведены на рис. 3 в виде графика зависимости прогиба балки от величины силы. Б) Балка (рис. 4) лежит на двух неподвижных цилиндрических роликах. Реакция каждой такой опоры направлена по нормали к изогнутой оси, она наклонена к вертикали на угол , поэтому возникает горизонтальная составляющая реакции , и изгибающий момент определяется так: . Рис. 4 – Прогиб балки на неподвижных роликовых опорах Расчет в этом случае выполняется почти так же, как и в первом случае. Только здесь независимой переменной является не , а . Если в первой задаче – это длина и исходной, и изогнутой балки, она остается постоянной, то во второй – это расстояние между опорами. Здесь именно это расстояние остается постоянным, а длина изогнутой балки с увеличением нагрузки тоже увеличивается, по мере роста нагрузки и прогиба балка как бы проваливается между опорами, соскальзывая в направлении касательной к изогнутой оси в точке соприкосновения балки с опорой. Поэтому в этом случае первоначальная длина балки должна быть несколько больше расстояния между опорами. Изогнутая ось показана на рис. 4, масштаб построения балки и изогнутой оси один и тот же. Видно, что в случае роликовых опор прогибы балки примерно в 1,5 – 2 раза больше, чем в случае обычных опор. В предельном состоянии угол поворота опорного сечения достигает значения и балка проваливается в межопорное пространство. Как показывают расчеты, при значениях силы, превышающих значение, соответствующее углу поворота опорного сечения (левого минус, правого плюс), равновесного состояния не существует. Поэтому описанное состояние балки с роликовыми опорами можно считать действительно предельным в том смысле, что балка больше не может противостоять возрастающей нагрузке. Заметим, что этот эффект наблюдается и при упругом изгибе. Так, по расчету обычная стальная измерительная линейка длиной 500 мм, шириной 25 мм и толщиной 0,5 мм, положенная на две опоры с пролетом 420 мм, при значении безразмерной силы , то есть при нагружении посредине силой Н, или гирькой с массой 380 г, должна провалиться между опорами, что и подтверждается простейшим опытом. Расчеты также показывают, что при упругопластическом изгибе нейтральная ось сечения несколько смещается в сторону сжатых волокон балки и делит сечение на две равновеликие части.