

Введение Многие технологические процессы представляют собой течения сжимаемых сред с контактными границами, которые претерпевают существенные деформации, фрагментацию, объединение. В качестве примера можно привести взаимодействие капель с пульсирующим газовым потоком в цилиндрической трубе в процессе горения жидкого топлива [1], диспергирование пузырей и последующее взаимодействие сплошной и дисперсной фаз в пульсационных аппаратах проточного типа, служащих для интенсификации процессов тепло- и массопереноса [2]. В некоторых процессах большая деформация контактных границ сопровождается интенсивными ударными волнами. Это наблюдается, например, при схлопывании кавитационных пузырьков с формированием кумулятивных струй вблизи стенок, в частности, при ультразвуковой очистке поверхностей [3], при сильном сжатии кавитационных пузырьков в таких технологиях как получение применяемой при производстве шин полимерной серы [4], гидродинамическая кавитационная обработка воды с целью ее обеззараживания [5]. Численные методы расчета ударных волн можно подразделить на две группы: с явным выделением фронта ударных волн и с его размыванием на несколько ячеек расчетной сетки. Если для рассматриваемой задачи крутизна фронта ударных волн существенна (например, при их интерференции), то предпочтительнее применять методы с явным выделением их фронта. В противном случае, что бывает гораздо чаще, ударные волны удобнее рассчитывать сквозным образом. Фронт ударной волны в методах сквозного счета размывается на несколько ячеек расчетной сетки. Размывание осуществляется либо за счет внутренних свойств разностной схемы, так называемой схемой (аппроксимационной) вязкости, либо при введении в исходные уравнения искусственных вязкостных слагаемых. Коэффициенты и схемой, и искусственной вязкости зависят от характеристик среды (плотности, скорости, скорости звука и др.) и параметров используемой расчетной сетки (характерного размера ячеек). Обычно аппроксимационные соотношения (разностная схема) выбираются так, чтобы эффект схемной вязкости был существенным лишь в малой окрестности крутых волн сжатия и ударных волн. Того же стараются добиться и при использовании искусственной вязкости, только делается это за счет подбора соответствующих выражений ее коэффициентов (линейная вязкость, квадратичная вязкость) и численных значений входящих в них сомножителей. Если контактные границы сильно деформируются, распадаются на части, или, наоборот, возникают в результате объединения отдельных структур, то их явное выделение становится весьма затруднительным. В таких случаях контактные границы удобнее рассчитывать на неподвижных (эйлеровых) сетках сквозным образом (аналогично сквозному счету ударных волн). При этом для неявного отслеживания контактных границ применяется какая-либо пространственная функция-идентификатор среды, принимающая в областях, занятых разными средами, постоянные

различающиеся значения, а в окрестности контактной границы непрерывно и монотонно изменяющаяся между этими значениями. Переходная область в окрестности контактной границы с промежуточными значениями функции-идентификатора может интерпретироваться как некая смесь контактирующих сред, физический смысл которой может быть и не определен. Изменение функции-идентификатора описывается уравнением переноса. Положение контактной границы можно устанавливать, например, по линиям определенного уровня или области максимального градиента функции-идентификатора. Для расчета задач с большими деформациями контактных границ и ударными волнами, в явном выделении которых нет необходимости, наиболее естественным является подход, в котором и ударные волны, и контактные границы рассчитываются на эйлеровой сетке сквозным образом (т.е. отслеживаются неявно). Среди методов сквозного счета ударных волн с их размытием с помощью схемной вязкости одним из наиболее популярных в настоящее время является метод С.К. Годунова (и его многочисленные модификации). Он широко применяется для численного решения задач динамики газа, жидкости, упруго-пластических тел и т.д. В методе С.К. Годунова исходные уравнения обычно записываются в дивергентной форме относительно массы, импульса и полной энергии единицы объема. Их разностные аппроксимации выражают законы сохранения массы, импульса и полной энергии отдельных ячеек расчетной сетки. В задачах контактного взаимодействия при явном выделении контактных границ метод С.К. Годунова применяется естественным образом, без внесения в его алгоритм каких-либо существенных изменений. Однако сквозной расчет без явного выделения контактных границ с использованием этого метода оказывается проблематичным. Согласно [6] использование консервативных схем сквозного счета приводит к появлению нефизичных осцилляций давления большой амплитуды в окрестности контактных границ. Избежать таких осцилляций можно, воспользовавшись неконсервативными схемами сквозного счета в переменных плотность, скорость, давление [6]. Выполнение соотношений Гюгонио на ударных волнах при использовании неконсервативных схем сквозного счета обеспечивается с помощью искусственной вязкости. Сравнительно недавно был предложен метод CIP-CUP (Constrained Interpolation Profile - Combined Unified Procedure) [7], позволяющий сквозным образом на эйлеровых сетках рассчитывать ударные волны и контактные границы с сильным перепадом акустического импеданса. В работе [8] показано, что этот метод является эффективным для расчета задач с большими деформациями контактных границ и интенсивными ударными волнами. В настоящей работе исследуются особенности расчета ударных волн в переменных плотность, скорость, давление с помощью разработанной авторами методики расчета на основе метода CIP-CUP. 1. Уравнения динамики сжимаемой среды Уравнения динамики сжимаемой жидкости имеют вид (1) Здесь t – время,

ρ – плотность, u – скорость, p – давление, c – скорость звука, Γ , B – константы. Предполагается, что на ударных волнах выполняются известные соотношения Гюгонио, которые выводятся на основе выполнения на разрывах законов сохранения массы, импульса и полной энергии.

2. Основные положения численного метода В одномерном случае $u = u_i$, $\tilde{N}p = \rho x_i$, $\tilde{N} \cdot u = ux$ и т.д., где i – направляющий вектор оси x . С учетом этого систему (1) можно записать следующим образом. (2) Здесь f_k , G_k – компоненты векторов $f = (\rho, u, p)^T$, $G = (-\rho \tilde{N} \cdot u, -\rho \cdot 1 p_x, -\rho c^2 \tilde{N} \cdot u)^T$. Неизвестными функциями наряду с ρ , u , p считаются также и их пространственные производные p_x , u_x , ρ_x . Они определяются не дифференцированием функций ρ , u , p , а из уравнений, (3) полученных дифференцированием уравнений (2). Как и в работах [7, 9], система (2), (3) расщепляется на конвективную и неконвективную части. Конвективная часть имеет следующий вид, (4) а неконвективная – следующий, (5). В алгоритме используются две разнесенные сетки: сетка S_0 с узлами x_i и сетка S_1 с узлами $x_{i+1/2}$. Сеточные аппроксимации функций ρ , p определяются на сетке S_0 , сеточные аппроксимации u – на сетке S_1 . Вычисления ведутся с шагом по времени Δt $n = 0, 1, 2, \dots$, n – номер временного шага. На каждом шаге по времени сначала рассчитываются уравнения конвективной части (4), так что по известным значениям ρ^n, u^n, p^n искомым сеточным функциям на временном слое t^n находятся промежуточные значения $\rho^{n+1/2}, u^{n+1/2}, p^{n+1/2}$. После этого рассчитываются уравнения неконвективной части (5). Здесь с использованием $\rho^{n+1/2}, u^{n+1/2}, p^{n+1/2}$ находятся значения $\rho^{n+1}, u^{n+1}, p^{n+1}$ искомым сеточным функциям на временном слое t^{n+1} . Решение уравнений конвективной части. Для расчета уравнений конвективной части (4) применяется один из вариантов полулагранжевых методов [9]. Для искомым функций, определенных на основной сетке S_0 , имеем ρ_i^n, u_i^n, p_i^n , (6) где ϕ – интерполяционная функция вида (7) Здесь $X = x - x_i$, коэффициенты C_m , β вычисляются из условий где $i_{up} = i - 1$ при $u_i > 0$, $i_{up} = i + 1$ при $u_i \leq 0$. При этом полагается, что $C_3 = 0$ при $\alpha = 1$, а также $\beta = 0$ при $\alpha = 0$. При $\alpha = 0$ функция становится полиномом третьего порядка, в противном случае это рациональная функция. Значения скорости в узлах, где эти компоненты не определены, рассчитываются либо с использованием соответствующих интерполяционных функций вида (7), либо простым осреднением. (8) Аналогичные (6), (7) выражения применяются и для искомым функций, определенных на сетке S_1 . При использовании (6) шаг по времени Δt n ограничен условием $\Delta t \leq \Delta x / |u|$. (9) Решение уравнений неконвективной части. Уравнения неконвективной части (5) аппроксимируются по времени следующими неявными соотношениями (10) При такой аппроксимации схема расчета $\rho^{n+1}, u^{n+1}, p^{n+1}$ не имеет ограничений на шаг по времени. Входящие в (10) пространственные производные приближаются центральными разностями на разнесенных сетках S_0, S_1 . Применив ко второму уравнению системы (10) операцию дивергенции и выразив из третьего уравнения, легко получить $p^{n+1} = p_i^{n+1} - \Delta x (u^{n+1} - u_i^{n+1}) / \Delta t$. (11) Расчет $\rho^{n+1}, u^{n+1}, p^{n+1}$ начинается с определения ρ^{n+1} из

уравнения (11). Пространственная дискретизация этого уравнения определяется пространственной дискретизацией уравнений (10). Система линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений давления p_i^{n+1} решается итерационным методом последовательной верхней релаксации. Затем из второго уравнения (10) находится u_i^{n+1} , а p_i^{n+1} определяется из соотношения . Уравнения неконвективной части (5) для искоемых производных, определяемых на основной сетке S_0 , аппроксимируются следующими соотношениями (12) где . Такая аппроксимация для $G_{i\pm 1}$ основывается на том, что уравнение неконвективной части (5) аппроксимируется следующим выражением . Соотношения (12) применяются в конце алгоритма расчета неконвективной стадии, когда рассчитаны все значения . Как отмечалось выше, значения компонент вектора скорости в узлах, где эти компоненты не определены, рассчитываются либо с использованием соответствующих интерполяционных функций вида (7), либо простым осреднением (8). Аналогичные (12) выражения применяются и для искоемых производных, определяемых на сетке S_1 .

Искусственная вязкость. Введение искусственной вязкости сводится к добавлению в правые части второго и третьего уравнений системы (1) слагаемых τ_x и τ_y , соответственно (13) где τ_x, τ_y (14) , c_v – коэффициент искусственной вязкости [10]. Таким образом в алгоритм расчета добавляется еще одна стадия – учета искусственной вязкости. Если полученные на неконвективной “невязкой” стадии значения скорости и давления обозначить u_i, p_i (сеточный индекс i для краткости опущен), то применяемые на стадии учета искусственной вязкости соотношения можно записать следующим образом τ_x, τ_y , , , определяются через значения сеточных функций, рассчитанных на конвективной стадии. Коэффициенты искусственной вязкости для жидкости обычно принимаются в интервале (0, 0,5), но, как показывают приведенные ниже результаты расчетов, для ударных волн с существенным изменением энтропии на фронте могут потребоваться и значения, превышающие 0,5. Выбор шага по времени. В задачах с ударными волнами при использовании явных схем, например, схемы С.К. Годунова, шаг по времени обычно выбирают из известного условия устойчивости Куранта. В частности, в случае равномерной эйлеровой сетки полагают $\Delta t \leq \Delta x / c_{CRT}$ (15) где c_{CRT} – число Куранта, $c_{CRT} \leq 1$. Метод настоящей работы позволяет проводить расчеты и при $c_{CRT} > 1$ при выполнении ограничения (9). Однако при $c_{CRT} > 1$ может возникать чрезмерное размывание крутых волн. Численные эксперименты показали, что оптимальное значение c_{CRT} для расчета ударных волн находится в интервале $0,1 \leq c_{CRT} \leq 1$. При $c_{CRT} \leq 0,1$ погрешность практически не уменьшается, а при $c_{CRT} > 1$ она с ростом c_{CRT} довольно быстро увеличивается.

3. Результаты расчетов

Исследование особенностей расчета ударных волн в переменных плотность, скорость, давление с помощью разработанной методики на основе метода CIP-CUP выполнялось на одномерных задачах о столкновении двух одинаковых по плотности и давлению потоков

жидкости, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми (по модулю) скоростями. В результате такого столкновения в жидкости образуются две симметричные плоские ударные волны, распространяющиеся в нормальном к плоскости столкновения направлении противоположно движению потоков. Параметры задачи задаются следующим образом: в начальный момент времени $t = 0$ жидкость (вода с параметрами $\Gamma = 7,15$, $B = 3072$ бар) с плотностью $\rho = 103$ кг/м³ и давлением $p = 1$ бар движется со скоростью $u = -u_0$ в области $x > x_0$ и скоростью $u = u_0$ в области $x < x_0$, где $u_0 > 0$. Полагается, что $x_0 = 30$ м, $u_0 = 50$ и 500 м/с. Расчетная область $0 \leq x \leq 60$ м покрывается равномерной сеткой из 300 ячеек. Расчеты проводились с шагом по времени, выбираемым согласно (15) при $\kappa_{CRT} = 0,2$. Поскольку в решении имеются ударные волны, то на них, согласно принятой в разделе 1 постановке задачи, должны выполняться соотношения Гюгонио. В численном решении их выполнение достигается за счет введения искусственной вязкости в уравнения для скорости и давления. Если искусственную вязкость не вводить вообще, то говорить о выполнении каких-либо соотношений на ударных волнах не имеет смысла, поскольку разностная схема не имеет формы законов сохранения. При введении слагаемых с искусственной вязкостью в уравнения для скорости и давления (13) и правильном выборе коэффициента cv в численном решении на ударных волнах будут выполняться соотношения Гюгонио, которые выводятся из законов сохранения на разрывах массы, импульса и полной энергии. Если слагаемые с искусственной вязкостью добавляются только в уравнение для скорости (т.е. $= 0$), то при правильном выборе коэффициента cv в численном решении на ударных волнах будут выполняться соотношения, получаемые из условий сохранения на разрывах массы, импульса и энтропии. Энтропия на ударных волнах, вообще говоря, не сохраняется, но ее изменение является величиной порядка ϵ^3 , где $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, ρ_1, ρ_2 плотности перед и за фронтом ударной волны соответственно. С учетом этого, для ударных волн с $\epsilon \ll 1$, что в жидкости может быть и при немалой их интенсивности, определяемой отношением $(p_2 - p_1)/p_1$, где p_1, p_2 - давление перед и за фронтом ударной волны соответственно, вместо закона сохранения полной энергии можно использовать условие сохранения энтропии. Наряду с чисто теоретическим интересом вариант с сохранением энтропии на ударных волнах может быть полезен, например, при тестировании алгоритма и программы расчета. Ниже будут представлены результаты расчетов с использованием двух описанных вариантов искусственной вязкости с коэффициентом $cv = 0; 0,2; 0,8$. При относительно слабом столкновении потоков (со скоростью $u_0 = 50$ м/с), когда изменение энтропии на возникающих ударных волнах мало (имеет порядок $\epsilon^3 \approx 3 \times 10^{-5}$), применение искусственной вязкости не является необходимым (рис. 1). В этом случае в численном решении при $\kappa_{CRT} = 0,1$ и $cv = 0$ осцилляции на фронтах ударных волн, распространяющихся в обе стороны от разрыва, отсутствуют.

Давление за ударными волнами и положение их фронтов хорошо согласуются с аналитическими решениями, полученными как в условиях сохранения на скачке полной энергии, так и в предположении постоянства энтропии (в обоих случаях здесь и далее подразумевается, что кроме этих условий на скачке выполняются также и условия сохранения массы и импульса). При $u_0 = 50$ м/с эти аналитические решения графически совпадают. Рис. 1 – Давление в правой половине расчетной области в момент $t = 0,01$ с. Скорость сталкивающихся потоков 50 м/с. Жирная линия – графически совпадающие аналитические решения с сохранением на разрыве полной энергии и энтропии, тонкая линия с символами ● – численное решение без искусственной вязкости. При увеличении скорости сталкивающихся потоков до $u_0 = 500$ м/с (рис. 2) образуются ударные волны с изменением энтропии, которое уже нельзя считать малым (порядка $\varepsilon_3 \gg 0,016$). При этом в аналитическом решении, полученном при условии сохранения на разрыве энтропии, скорость распространения ударных волн и давление за их фронтом оказывается заметно ниже, чем в решении с сохранением полной энергии. Это объясняется тем, что при использовании условия сохранения энтропии имеющее место на ударной волне преобразование механической энергии в тепловую не учитывается. В численном решении без введения искусственной вязкости в окрестности фронта ударных волн, возникают нефизичные осцилляции, а давление за фронтом ударных волн и положение фронта рассчитываются с большой погрешностью. Рис. 2 – Давление в правой половине расчетной области в момент $t = 0,01$ с. Скорость сталкивающихся потоков 500 м/с. Жирные линии – аналитические решения с сохранением на разрыве полной энергии (линия 1) и энтропии (линия 2), тонкая линия с символами ● – численное решение без искусственной вязкости. При использовании искусственной вязкости в уравнениях для скорости и давления (13) и определении ρ , согласно (14) в численном решении, рассчитанном при $cv = 0,8$, осцилляции на фронтах ударных волн отсутствуют (рис. 3). При этом положение самих фронтов и давление за ними удовлетворительно согласуются с аналитическим решением, полученным при выполнении на разрыве закона сохранения полной энергии. При меньших значениях cv согласование с аналитическим решением ухудшается, что на рис.3 демонстрирует кривая, соответствующая $cv = 0,2$. Рис. 3 – Давление в правой половине расчетной области в момент $t = 0,01$ с. Скорость сталкивающихся потоков 500 м/с. Жирная линия – аналитическое решение с сохранением на разрыве полной энергии, тонкие линии с символами – численные решения, полученные при определении ρ , согласно (14) с $cv = 0,2$ (x) и $cv = 0,8$ (●). При использовании искусственной вязкости только в уравнении для скорости (т.е. при $\rho = 0$) и с определением ρ согласно (14) численное решение, рассчитанное при $cv = 0,8$, удовлетворительно согласуется с аналитическим решением, полученным при условии сохранения полной энтропии (рис. 4). При меньших значениях cv согласование с

аналитическим решением также ухудшается, как видно на рис.4 по кривой, соответствующей $cv = 0,2$, Рис. 4 – Давление в правой половине расчетной области в момент $t = 0,01$ с. Скорость сталкивающихся потоков 500 м/с. Жирная линия – аналитическое решение с сохранением на разрыве энтропии, тонкие линии с символами – численные решения, полученные при $cv = 0$ с $cv = 0,2$ (x) и $cv = 0,8$ (●) Представленные на рис.1, 3, 4 результаты свидетельствуют о том, что при использовании методики настоящей работы ширина размывания фронта ударной волны в численном решении без осцилляций в окрестности фронта (на рис.1 это достигается без искусственной вязкости, на рис.3, 4 - с ее применением) соответствует противопоточным схемам первого порядка точности. Представлены результаты исследования особенностей расчета ударных волн в переменных плотность, скорость, давление с помощью разработанной авторами методики на основе метода CIP-CUP. Одно из важных достоинств этого метода заключается в том, что он позволяет сквозным образом (т.е. без явного выделения) рассчитывать не только ударные волны, но и контактные разрывы с большим различием акустических импедансов контактирующих сред. Установлено, что при расчете ударных волн в жидкости методом CIP-CUP искусственная вязкость не требуется, если изменение энтропии на фронте ударной волны относительно невелико (т.е. когда решения с соотношениями на разрыве, выведенными на основе выполнения законов сохранения массы, импульса и полной энергии и с соотношениями, полученными при условии сохранения массы импульса и энтропии, различаются незначительно). В таком случае и без введения искусственной вязкости в численном решении отсутствуют нефизичные осцилляции в окрестности фронта ударной волны, а характеристики потока за фронтом волны и скорость ее распространения близки к аналитическим. При расчете ударных волн с существенным изменением энтропии на фронте без введения искусственной вязкости в окрестности фронта ударной волны возникают нефизичные осцилляции, а характеристики потока за фронтом волны и скорость ее распространения рассчитываются со значительными погрешностями. По мере увеличения изменения энтропии на фронте ударной волны амплитуда нефизичных осцилляций и указанные погрешности возрастают. Введение искусственной вязкости с определенными значениями ее коэффициента, которые подбираются путем вычислительного эксперимента, устраняет как нефизичные осцилляции, так и погрешности в характеристиках потока за фронтом ударной волны и в скорости ее распространения. Если влияние искусственной вязкости в уравнении для скорости учитывать, а в уравнении для давления – нет, то при соответствующем подборе коэффициента вязкости с помощью вычислительного эксперимента можно получить численное решение, соответствующее аналитическому с выполнением на ударной волне условий сохранения массы, импульса и энтропии. При этом согласование с

аналитическим решением оказывается примерно таким же, что и в описанном выше случае применения искусственной вязкости в уравнениях для скорости и давления. Ширина размывания фронта ударных волн при их расчете методом CIP-CUP соответствует противопотоковым схемам первого порядка точности.