Введение Из теории динамических систем известно, что предельное поведение системы двух дифференциальных уравнений может быть только стационарным или периодическим (автоколебательным) [1]. В работах [2-4] исследованы модели, описывающие автоколебания в каталитических реакциях системами двух дифференциальных уравнений. В трехмерных системах возможны и более сложные, непериодические, предельные движения (странные аттракторы, хаос, турбулентность). Одной из наиболее известных причин возникновения странных аттракторов считается бесконечная последовательность бифуркаций удвоений периода [5]. После прохождения бифуркационного значения параметра все более усложняющиеся устойчивые периодические движения переходят в новое качество - хаотических колебаний. Странные аттракторы возникают при изменении параметров простых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в физике, химии, биологии и др. [6]. Наиболее известными хаотическими системами, имеющими физический смысл, являются модель Лоренца для прогноза погоды (упрощение гидродинамических уравнений Навье-Стокса) x¢ = –ax+ay, y¢ = bx–xz–y, z¢ = xy–gz при a=10, b>28, g=8/3, (1) магнитогидродинамическая модель Земли (динамо Рикитаке) [7 x¢ = –mx+zy, y¢ = –my-ax+xz, z¢ = 1- xy при m=1, a=m(K 2-K -2), K=2 (2) и модель биохимической реакции Росслера [8] x¢ = –(y + z), y¢ = x + ay, z¢ = b+ z(x-c) при a=0.2, b=0.2, c³4.2. (3) Вопросы моделирования сложной динамики применительно к практическим целям затрагиваются в работах [9-10]. При этом, в целом, как отмечают редакторы сборника [6], математическая теория странных аттракторов не разработана. Целью данной работы является обобщение моделей (1)-(3), способных описывать сложную динамику, с учетом инвариантных линейных преобразований координат. Результаты и их обсуждение Исследуем и классифицируем хаотические системы, инвариантные (1)-(3) относительно линейных преобразований вида (новые переменные выделены жирным шрифтом): x=a1x+b1, y=a2y+b2, z=a3z+b3, где a1a2a3¹0. (4) Инварианты модели Лоренца. Обобщенная модель Лоренца, инвариантная относительно преобразований (4), запишется x¢ = a[a2 y/a1– x + (b2–b1)/a1], y¢ = a1(b– b3)x/a2- a1a3xz/a2 - y – b1a3z/a2 + +bb1/a2– b1b3/a2 - b2/a2, (5) z¢ = a1a2xy/a3- gz + b1a2y/a3 + a1b2x/a3+ +b1b2/a3 - gb3/a3. Все модификации модели (5), аналогично классической модели Лоренца, имеют «центральное» стационарное состояние x¥= –b1/a1, y¥= –b2/a2, z¥= –b3/a3 и при b>1 еще два «периферийных» x¥=a2y/a1+(b2–b1)/a1, y¥= [–b2 ±Ög((b–1)]/a2, z¥= (b–b3-1)/a3, которые при b=1 сливаются с центральным (бифуркация рождения множественности). Анализ показал, что при a1>-(1+g)/a центральный стационар неустойчив. Если при этом существуют и неустойчивы два периферийных стационара, то возникает бифуркация рождения сложнопериодического (апериодического) режима (хаос). Модель 5.1. При b2=b3=0 система (5) запишется: 5.1) x¢= a[a2y/a1–x–b1/a1], y¢= a1bx/a2- a1a3xz/a2-

y–b1a3z/a2+bb1/a2, z¢=a1a2xy/a3-gz+b1a2y/a3. Стационарные состояния – центральное x¥=–b1/a1, y¥=0, z¥=0 и при b>1, a=10, g=8/3 и два периферийных x¥=a2y/a1–b1/a1, y¥= ±6Ö2/a2, z¥=27/a3. При a1>-(1+g)/a= -11/30 и b>24 все стационарные состояния неустойчивы. При этих значениях параметров и вблизи них существует область неустойчивости и хаос, рис. 1. Инварианты модели Рикитаке. Обобщенная модель Рикитаке (2) с учетом (4) примет вид x¢ = -mx+a2a3zy/a1+(a2b3y + +a3b2z +b2b3–mb1)/a1, y¢ = -my-aa1x/a2+a1a3xz/a2 + +(a1b3x+a3b1z+b1b3-mb2–ab1)/a2, (6) z¢ = 1/a3- a1a2xy/a3 - a1b2x/a3- b1a2y/a3 - -b1b2/a3. Классическая модель Рикитаке имеет два действительных y¥=1/x¥, x¥=±Ö[a+Ö(a2+4m2)]/ 2m, z¥=[a+Ö(a2+4m2)]/2 и два комплексно-сопряженных стационарных состояния x¥= ±{Ö[a-Ö(a2+4m2)]/2m}i, где aºm(K2-K-2), i – мнимая единица. Все модификации (6), аналогично модели Рикитаке, имеют два действительных стационарных состояния. Если все они неустойчивы, то возникает бифуркация рождения сложнопериодического режима (хаос). Рис. 1 – Зависимости x(t), y(t), z(t) для модели 5.1 при a1=a2=a3=0.1, b1=0.5, b2=b3=0 и a=10, b=25, g=8/3 Модель 6.1. При b2=b3=0 система (6) запишется x¢=-mx+a2a3zy/a1–mb1/a1, y¢ =-my-aa1x/a2 +a1a3xz/a2+(a3b1z–ab1)/a2, z¢=1/a3-a1a2xy/a3-b1a2y/a3. Два действительных стационарных состояния y¥=1/x¥, x¥=(±{Ö[a+Ö(a2+4m2)] /2m}- b1)/a1, z¥= [a+Ö(a2+4m2)]/2 неустойчивы, например, при a1= a2=a3=b1=1. Вблизи этих значений параметров существует область неустойчивости и хаотический режим, рис. 2. Рис. 2 – Зависимости x(t), y(t), z(t) для модели 6.1при m=1, K=2 и b1=1, b2=b3=0 Инварианты модели Росслера. Обобщенная модель Росслера (3) с учетом (4) примет вид x¢ = -a2y/a1-a3z/a1-(b2 +b3)/a1, y¢ = a1x/a2+ay +(b1+ab2)/a2, (7) z¢ = (b+ b1b3-cb3)/a3+ a1xz + +a1b3x/a3+(b1-c)z. Классическая модель Росслера при Dºc2-4ab>0 имеет два действительных стационарных состояния y¥=-z¥, x¥=az¥, z¥=(c±ÖD)]/(2a), которые сливаются в одно при D=0 и становятся комплексно-сопряженными при D0. Все модификации (7), аналогично модели Росслера, имеют два действительных стационарных состояния. Если все они неустойчивы, то возникает бифуркация рождения сложнопериодического режима (хаос). Модель 7.1. При b2=b3=0 система (7) запишется x¢ = -a2y/a1-a3z/a1, y¢ = a1x/a2+ay +b1/a2, z¢ = b/a3+a1xz+(b1-c)z. Два действительных стационарных состояния y¥= - a3z¥/a2, x¥= (aa3z¥ -b1)/a1, z¥=(c±ÖD)]/(2aa3) неустойчивы, например, при a1=a2=a3=b1=1. Вблизи этих значений параметров существует область неустойчивости и хаос, рис. 3. Рис. 3 – Зависимости x(t), y(t), z(t) для модели 7.1 при a=0.2, b=0.2, c=4.2, a1= a2=a3=b1=1 и b2=b3=0 Классификация инвариантных моделей хаоса приведена в табл. 1. Варьирование ненулевых значений дает различные инварианты моделей (1)-(3). Например, строке 8 при a1=a2=a3=1, b1=b2=b3=0 соответствуют классические модели Лоренца, Рикитаке и Росслера. При a1=a2=a3¹1 - модифицированные модели (1)-(3) и т.д. При a1=a2=-1, a3=1, b1=b2=b3=0 (т.е. для преобразования x®-x, y®-y, z®z) -

модели, инвариантные по свойствам и форме моделям (1)-(3). Таблица 1 – Модели хаоса, инвариантные относительно преобразований (4) № a1 b1 a2 b2 a3 b3 Примечание 1 ¹0 ¹0 ¹0 ¹0 ¹0 ¹0 Обобщенные модели (5)-(7) 2 ¹0 ¹0 ¹0 ¹0 ¹0 0 3 ¹0 ¹0 ¹0 0 ¹0 ¹0 4 ¹0 ¹0 ¹0 0 ¹0 0 Модели 5.1, 6.1 и 7.1 5 ¹0 0 ¹0 ¹0 ¹0 ¹0 6 ¹0 0 ¹0 ¹0 ¹0 0 7 ¹0 0 ¹0 0 ¹0 ¹0 8 ¹0 0 ¹0 0 ¹0 0 Классические модели (1)-(3) Отметим, что модели (5)-(7) и данные табл.1 далеко не исчерпывают всех возможных модификаций моделей хаоса. На основе более сложных (билинейных, трилинейных) преобразований, можно построить бесконечно много других модификаций моделей хаоса, отличных от приведенных в табл. 1. Рассмотрим трилинейные преобразования общего вида (новые переменные выделены жирным шрифтом): x= a1x+b1y+c1z+d1, y=a2x+b2y+c2 z+d2, z= a3x+b3y+c3 z+d3, (8) где определитель из коэффициентов D º det (a1, b1, c1; a2, b2, c2; a3, b3, c3) = a1c2b3+ a2b1c3+ b2a3c1- a1b2c3- a2c1b3- c2a3b1 ¹ 0. Очевидно, что монолинейные преобразования (4) являются частным случаем (8). Преобразуем модели хаоса с учетом преобразований (8). Например, классическая модель Лоренца (4) после преобразований (8) примет вид a1x¢+b1y¢+c1z¢= a[(a2–a1)x+(b2–b1)y+(c2 – –c1)z+(d2-d1)] º f1 , a2x¢+b2y¢+c2 z¢ = (ba1–a2)x+(bb1–b2)y+ +(bc1–c2)z+(bd1–d2)– –(a1x+b1y+c1z+d1)(a3x+b3y+c3 z+d3) º f2, (9) a3x¢+b3y¢+c3 z¢ = (a1x+b1y+c1z+d1)(a2x+b2y+c2 z+d2) –g(a3x+b3y+c3 z+d3) º f3 . Разрешая систему (9), линейную относительно производных по новым переменным, получим обобщенную модель Лоренца, инвариантную относительно преобразований (8) x¢ = Dx /D, y¢ = Dy /D, z¢ = Dz /D, (10) где Dx º det(f1, b1, c1; f2, b2, c2; f3, b3, c3) = -(-b1c3d2+ c1d2b3-c1b2gd3-c1b22b1y2+b1gb3yc2-ab2yc2b3+ ab22yc3-b12a3c3yx-b12c3y2b3-b12c3yd3+ b12y2b2c2+ b12ya2xc2- b12c32yz-b12c3by+ b12yc22z+ b12yd2c2- b1c3b2y-b1c32d1z-b1a1c3bx-b1c3d1d3-b1c3c2z- b1c3bd1- b1c3a2x-b1a1c32xz- b1a1c3xd3+ b1c1z2c22+ b1gd3c2+ b1a1xc22z+ b1d1d2c2+ b1d1c22z+ b1a1x2a2c2- b1c3c1zd3-b1c3bc1z- b1c3d1b3y+ b1c1zd2c2+ b1d1a2xc2-b1ya2xb2c1+ b1gc3zc2+ b1a1xb2yc2-b1a1b3c3yx+ b1a3b3c1yx- b1a3c3d1x+ b1a3gxc2+ bc12zb3+ +c12z2c3b3+ c12zb32y+ c12za3xb3-b22c12zy-b2c12zd2-b2c12z2c2- b2c12za2x-c1b2b1yd2+ c1bb1yb3+ c1d1a3xb3- c1b2gc3z+ c1b1y2b32-c1b22d1y+ c1b2yb3+c1d1b32y-c1b2d1d2+ c1a1x2a3b3+ c1a1xb32y-c1a1b22xy+ c1a1xd3b3+ c1a1bxb3- c1a1b2xd2-c1a1b2x2a2-c1b2d1c2z- c1b2ga3x- c1b2gb3y- c1b2d1a2x+ c1a2b1xc2z- c1xc3za3b1+ c1b1yd3b3- c1a1b2xc2z+ c1a1xc3zb3+ c1d1c3zb3-aa2xc2b3+ aa2xb2c3+ ab1yc2b3- ab1yb2c3- ac22zb3+ac2zb2c3-ad2c2b3+ ad2b2c3+ aa1xc2b3- aa1xb2c3+ac1zc2b3-ac1zb2c3+ ad1c2b3- ad1b2c3+ c1a2xb3+ b1a1xd2c2+c1c2zb3-b1c32c1z2+ b1d1b2yc2+ c1bd1b3-b1a3a1c3x2+ c1d1d3b3+ c12zd3b3), Dy º det(a1, f1, c1; a2, f2, c2; a3, f3, c3), Dz º det(a1, b1, f1; a2, b2, f2; a3, b3, f3). Два последних определителя не раскрыты из-за громоздких выражений. Варьируя в (10) коэффициенты a1,b1,c1,d1, a2,b2,c2,d2, a3,b3,c3,d3 (так, чтобы D ¹ 0) можно получить любое число модификаций моделей хаоса, инвариантных относительно преобразований (8). Нетрудно убедиться, что при b1=c1=b2=c2=b3=c3 =0 модель (10) упрощается и совпадает с (4). Модель 9.1. Например, при a1=0, a2=0, a3=1, b1=0, b2=1, b3=0, c1=1, c2=c3=d1=d2=d3=0 получим следующую модификацию модели Лоренца: 9.1) x¢ = yz-xg, y¢ = (b-x)z-y, z¢ = a(y-z). Эта модификация отсутствует именно в таком виде в табл. 1 и соответствует замене переменных x®z, y®y, z®x. Это значит, что она инвариантна классической модели Лоренца относительно преобразований (8) как по свойствам так и по форме. Модель 9.2. При b1=1 (остальные коэффициенты те же) получим более сложную модификацию модели Лоренца: 9.2) x¢ = yz+y2-gx, y¢ = (b-x)z+(b-x-1)y, z¢ = (x -a-b)z- (b-x-1)y. Эта модификация также отсутствует в табл. 1 и соответствует замене переменных x® y+z, y®y, z®x. Это значит, что она инвариантна классической модели Лоренца относительно преобразований (8) только по свойствам, но не по форме, рис. 4. Рис. 4 – Зависимости x(t), y(t), z(t) для модели 9.2 при a=10, b=28, g=8/3, a3=b1=b2=c1=1,a1=a2=b3=c2=c3=d1=d2= d3=0 Таким образом, нами получены все возможные линейные инварианты известных моделей хаоса, которые также могут быть использованы для описания сложного динамического поведения различных процессов и явлений природы.