

Введение Вопросы моделирования сложной динамики привлекают внимание многих исследователей (см., например, [1-4]). Ранее в статье [4] нами было проведено обобщение известных моделей Лоренца, Рикитаке и Росслера, способных описывать хаотическое поведение с учетом инвариантных линейных преобразований координат. В продолжение этой статьи в данном сообщении рассматриваются более сложные обобщения модели Лоренца $\dot{x} = -ax + ay$, $\dot{y} = bx - xz - y$, $\dot{z} = xy - gz$ при $a=10$, $b>28$, $g=8/3$, (1) инвариантные относительно линейных неавтономных и нелинейных автономных преобразований координат. Результаты и их обсуждение Автономные нелинейные преобразования.

Рассмотрим квадратичную деформацию со сдвигом по всем переменным без поворота осей координат вида (для более сложных преобразований выкладки становятся громоздкими) $x = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $y = a_2y^2 + b_2y + c_2$, $z = a_3z^2 + b_3z + c_3$, (2) где $D \equiv \det(a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3) \neq 0$ (условие физичности). Преобразуем классическую модель Лоренца (1) с учетом (2), разрешим ее относительно производных от новых переменных и получим обобщенную модель Лоренца, инвариантную ей по свойствам относительно преобразований (2) $\dot{x} = a[(a_2y^2 + b_2y + c_2) - (a_1x^2 + b_1x + c_1)] / (2a_1x + b_1)$, $\dot{y} = [(a_1x^2 + b_1x + c_1)(b - z) - (a_2y^2 + b_2y + c_2)] / (2a_2y + b_2)$, (3) $\dot{z} = [(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2y^2 + b_2y + c_2) - g(a_3z^2 + b_3z + c_3)] / (2a_3z + b_3)$. Варьируя коэффициенты этой модели можно получить бесконечное множество квадратичных модификаций модели Лоренца и провести их классификацию. Например, в частном случае, при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ модель (3) совпадает с моделью (5) статьи [4]. Модель 3.1. При $a_1 = a_2 = 0.01$, $a_3 = 1$, $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$ получим дробно-нелинейную модификацию модели Лоренца: 3.1) $\dot{x} = a[(0.01y^2 + y) - (0.01x^2 + x + 1)] / (0.02x + 1)$, $\dot{y} = [(0.01x^2 + x + 1)(b - z) - (0.01y^2 + y)] / (0.02y + 1)$, $\dot{z} = [(0.01x^2 + x + 1)(0.01y^2 + y) - gz^2] / 2z$. Эта модификация отсутствует среди линейных инвариантов и соответствует замене переменных $x \rightarrow 0.01x^2 + x + 1$, $y \rightarrow y = 0.01y^2 + y$, $z \rightarrow z^2$. Она инвариантна по свойствам классической модели Лоренца относительно преобразований квадратичной деформации по всем осям без поворота (рис. 1). Рис. 1 - Зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ для модели 3.1 при $a=10$, $b=28$, $g=8/3$, $a_1=a_2=0.01$, $a_3=1$, $b_1=b_2=1$, $b_3=0$, $c_1=1$, $c_2=c_3=0$ Модель 3.2. При $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$ получим более простую дробно-нелинейную модификацию модели Лоренца: 3.2) $\dot{x} = a[y - (x + 1)] / (0.02x + 1)$, $\dot{y} = [(0.01x^2 + x + 1)(b - z) - (0.01y^2 + y)] / (0.02y + 1)$, $\dot{z} = [(0.01x^2 + x + 1)(0.01y^2 + y) - gz^2] / 2z$. Эта модификация, также отсутствующая среди линейных инвариантов, является частным случаем предыдущей и соответствует замене переменных $x \rightarrow x + 1$, $y \rightarrow y$, $z \rightarrow z^2$. Она инвариантна по свойствам модели Лоренца относительно сдвига по оси x на единицу и квадратичной деформации по оси z без поворота (рис. 2). Неавтономные преобразования. Рассмотрим знаменитые преобразования Лоренца для четырехмерной системы «пространство-время», применяемые в теории

относительности [5] прямые $x = x, y = y, z = (z - vt) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}, t = (t - vz/c^2) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, (4) обратные $x = x, y = y, z = (z + vt) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}, t = (t + vz/c^2) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, (5) где c - скорость света, v - скорость объекта. Они являются обобщением вращения системы координат, сохраняют инвариантными форму основных законов физики (образуют группу Лоренца-Пуанкаре) и могут быть записаны в различной (например, гиперболической) форме: прямые $x = x, y = y, z = z \operatorname{ch} q - ct \operatorname{sh} q, ct = ct \operatorname{ch} q - z \operatorname{sh} q$, (6) обратные $x = x, y = y, z = z \operatorname{ch} q + ct \operatorname{sh} q, ct = ct \operatorname{ch} q + z \operatorname{sh} q$, (7) где q - быстрота (параметр), $\operatorname{sh} q = (e^q - e^{-q})/2$ и $\operatorname{ch} q = (e^q + e^{-q})/2$ гиперболические синус и косинус. Рис. 2 - Зависимости $x(t), y(t), z(t)$ для модели 3.2 при $a=10, b=28, g=8/3, a_1=a_2=0, a_3=1, b_1=b_2=1, b_3=0, c_1=1, c_2=c_3=0$

Преобразуем классическую модель Лоренца (1), например, с помощью (7) и разрешим ее относительно производных от новых переменных. Так, для переменной x преобразования выполняются следующим образом $dx/dt = dx/dt \cdot dt/dt = a(y-x) (\operatorname{ch} q + dz/dt \operatorname{sh} q/c)$. Выполнив аналогичные преобразования для остальных переменных (опущены), получим обобщенную модель Лоренца, инвариантную ей по свойствам относительно неавтономных преобразований $x\phi = a(y-x)(\operatorname{ch} q + z\phi \operatorname{sh} q/c), y\phi = [bx - y - x(z \operatorname{ch} q + ct \operatorname{sh} q)](\operatorname{ch} q + z\phi \operatorname{sh} q/c)$, (8) $z\phi = [xy - g \operatorname{ch} q (z + ct \operatorname{th} q - c \operatorname{sh} q)] / [\operatorname{ch} q - \operatorname{th} q xy/c + g \operatorname{sh} q (z + ct \operatorname{th} q)/c]$. Варьируя параметры c и q в правых частях модели (8), получим бесконечное множество новых модификаций модели Лоренца, инвариантных относительно неавтономных преобразований (7). Например, при $q=0, \operatorname{ch} q=1, \operatorname{sh} q=0$ модель (8) совпадает с классической моделью Лоренца (1). Модель 8.1. При $q=1, \operatorname{ch} q=(e+1/e)/2=1.54, \operatorname{sh} q=(e-1/e)/2=1.18$ и модель (8) примет вид: 8.1) $x\phi = \operatorname{ch}(1)a(y_2 - x_2), y\phi = \operatorname{ch}(1)(bx - y - xz \operatorname{ch}(1)), z\phi = xy/\operatorname{ch}(1) - gz$. Эта модификация отсутствует среди линейных автономных и нелинейных неавтономных инвариантов. Она соответствует замене переменных $x \otimes x, y \otimes y, z \otimes \operatorname{ch}(1)z + ct \operatorname{sh}(1), t \otimes \operatorname{ch}(1)t + z \operatorname{sh}(1)/c$ и инвариантна по свойствам модели Лоренца относительно неавтономных преобразований (7), рис. 3. Рис. 3 - Зависимости $x(t), y(t), z(t)$ для модели 8.1 при $a=10, b=28, g=8/3, c=300000, q=1$

Хаос возможен и при других модификациях модели Лоренца, не упомянутых выше. Эти модификации инвариантны относительно каких-то, вообще говоря, неизвестных, нелинейных и неавтономных преобразований. Например, нами экспериментально установлены следующие модификации модели Лоренца. Модели 9.1-9.5. 9.1) $x\phi = -ax + ay, y\phi = bx - xz - y, z\phi = xy - gz + c, -300 \leq c \leq 7$; 9.2) $x\phi = -ax + ay + d, y\phi = bx - xz - y, z\phi = xy - gz, -15 \leq d \leq 16$; 9.3) $x\phi = -ax + ey + d, y\phi = bx - xz - y, z\phi = xy - gz, -15 \leq e \leq 48$; 9.4) $x\phi = -ax + ay, y\phi = bx - xz, z\phi = xy - gz$; 9.5) $x\phi = -ax + ay, y\phi = bx - xz - y, z\phi = xy - c, c^3 0$ (c, d, e - параметры). Для этих моделей с ростом c хаотичность растет. Отметим, что они не следуют из моделей (3) или (8). На рис. 4 в качестве примера приведены результаты численного анализа модели 9.5. Рис. 4 - Зависимости $x(t), y(t), z(t)$ для модели 9.5 при $c=100$

Таким образом, нами получены все возможные линейные и нелинейные инварианты аттрактора Лоренца, описывающие хаотическую динамику простыми трехмерными

автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений.