Введение Некоторые агрегаты сложного оборудования [1,2] могут иметь элементы в виде составных поверхностей, соединенных между собой статически неопределимым образом - в трех и более точках. Напряженно деформированное состояние таких конструкций необходимо определять с учетом условий совместного деформирования отдельных звеньев. В таких случаях внутренние усилия и реакции в узлах соединения определяются не столько внешней нагрузкой, сколько жесткостными характеристиками и взаимным расположением отдельных частей. Кроме того, линейное и геометрически нелинейное решения при моделировании таких конструкций очень часто существенно отличаются. Поэтому представляет интерес вопрос о зависимости линейного и геометрически нелинейного решения от взаимного расположения и относительной толщины поверхностей. В данной работе предлагается вариант построения геометрически нелинейной математической модели для решения этой задачи. Основные соотношения и условия связи отдельных звеньев Рассмотрим конструкцию, состоящую из двух звеньев - несущей и прикрепленной к ней на шарнирах управляющей поверхностью. Каждое звено будем представлять оболочкой, отнесенной к произвольной криволинейной системе координат , нормально связанной со срединной поверхностью данного звена. Пусть - радиус-вектор точек срединной поверхности, а - орт нормали к ней. Базисные векторы основного базиса определятся так [3]: . Радиус-вектор произвольной точки пространства, удаленной от срединной поверхности на расстояние , будет . Перемещения произвольной точки представим в виде , где - компоненты вектора перемещений в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с корневым сечением звена, с ортами . Тогда i,j =1,2,3. (1) Будем полагать, что компоненты перемещения по толщине оболочки меняются по линейному закону (гипотеза типа Тимошенко), обжатие отсутствует:, (2) где компоненты перемещений точек срединной поверхности, компоненты угла поворота нормали. Будем рассматривать пологие достаточно тонкие оболочки, у которых метрика по толщине не меняется, то есть будут справедливы соотношения (3) Запишем нелинейные геометрические соотношения - нелинейную зависимость между тензором деформаций и вектором перемещений - в виде [4]: (4) Представим как сумму линейной и собственно нелинейной частей : , где (5) . (6) Развернем (5) с учетом (1) и (3): (7) где В силу принятых ранее гипотез о распределении перемещений по толщине (2) выражения (7) примут вид (8) Сложность решения геометрически нелинейных задач заключается в определении нелинейной составляющей геометрических соотношений , так как коэффициенты перед компонентами перемещений и их производными сами являются перемещениями и их производными, меняющимися в процессе деформирования. Для определения этих коэффициентов будем использовать подход, приведенный в работе [5]. Прежде чем записать выражение для , произведем некоторые преобразования. Представим в виде . (9) Тогда . (10)

Подставим (1) в (10) с учетом (2): (11) Обозначив (12) получаем (13) Выражения для нелинейной составляющей тензора деформаций (13) по своей структуре аналогичны линейным (8). Основное отличие состоит в коэффициентах . Это достигается благодаря соотношениям (9) - (12). Без них выражения для были бы весьма громоздкими и неудобными. Это также позволяет реализовать удобный алгоритм решения нелинейной задачи. По существу её решение сводится теперь к определению коэффициентов , зависящих только от геометрии деформированной и недеформированной поверхностей отсчета. Поскольку выражения для и имеют теперь сходную структуру, то процедуры формирования линейной и нелинейной частей матрицы жесткости отличаются лишь тем, что для линейной части жесткостные коэффициенты известны и неизменны, а для нелинейной части определяются и уточняются в процессе расчета. Для получения основных уравнений воспользуемся вариационным принципом возможных перемещений Лагранжа. Запишем полную энергию системы Э=, (14) где - деформации, - напряжения, - перемещения точек тела, внешние силы, - объем тела. При конечно-элементной аппроксимации выражение (14) можно записать в виде Э = П, где , вектор узловых перемещений,матрица жесткости, вектор узловых нагрузок. Для моделирования связей воспользуемся методом множителей Лагранжа [6 - 8], рассматривая условия совместности перемещений в узлах соединения звеньев как наложенные на систему ограничения (15) Построим расширенный функционал полной энергии системы добавив к исходному функционалу ограничения , умноженные на некоторую константу λ (множитель Лагранжа): . Определим необходимые условия экстремума функционала при ограничениях (16) Запишем выражения для q связей системы с n степенями свободы в виде , где G - матрица размерностью коэффициентов в уравнениях задающих ограничения, а s - вектор размерностью q, компоненты которого заданные константы. Уравнение (2) теперь примет вид . (17) Рассмотрим построение матрицы G на конкретном примере. Допустим, что на систему наложено только одно ограничение - перемещение в точке i должно быть равно перемещению в точке j, т.е. . Тогда уравнение (17) запишется в виде , матрица G будет иметь одну строку, в которой , а остальные элементы и вектор равны 0: Введя обозначения , где - множители Лагранжа, запишем выражение для расширенного функционала системы . (18) Подставив (17) и (18) в (16), получаем систему уравнений которую можно представить в виде . (19) Нижняя часть матричного соотношения (19) представляет собой систему ограничений. Она может быть решена отдельно. Из верхней части (19) получаем , что после подстановки в нижнюю часть(19) позволяет найти . В данном случае по своему физическому смыслу множители Лагранжа являются реакциями в узлах соединения составных частей. По приведенной методике были проведены расчеты составной конструкции, состоящей из двух оболочек нулевой кривизны (пластин), одна из которых (несущая поверхность) консольно закреплена, а другая (управляющая поверхность) навешена на первой в трех точках. На рис. 1 и 2 приведены значения горизонтальных реакций в среднем шарнире, возникающих от вертикальных сосредоточенных сил, приложенных на концах несущей и управляющей поверхностей, в линейной и геометрически нелинейной постановках в зависимости от угла отклонения управляющей поверхности . Длина пластин 4 м, толщина 0,1м и 0,02м, ширина несущей поверхности 1м, управляющей 0,25 м. Модуль упругости материала Па, коэффициент Пуассона . Нагрузка была подобрана таким образом, что вертикальное перемещение концевой точки консоли при в обоих случаях была равна 15% от длины консоли. Для конструкции с толщиной 0,1м нагрузка несущей поверхности 145300 Н, управляющей 50780 Н; с толщиной 0.02м соответственно 1188 Н и 415 Н. Как видно из рис. 1 и 2, расхождение между линейным и нелинейным решениями значительно. Оно составляет десятки процентов у более толстых пластин (рис.1) и сотни процентов у более тонких (рис.2). Это ведет к существенному перераспределению внутренних усилий и изменению напряженно - деформированного состояния всей конструкции. Рис. 1 - Изменение реакции в среднем шарнире в зависимости от при 0,1м; 1 - линейное решение, 2 - нелинейное решение Рис. 2 - Изменение реакции в среднем шарнире в зависимости от при 0,02м; 1 - линейное решение, 2 - нелинейное решение