В настоящее время при строительстве быстровозводимых зданий и сооружений, а также при реконструкции и усилении существующих сооружений широкое применение получили легкие стальные тонкостенные конструкции. Как известно [1, 2] теории расчета обычных конструкций не применимы для стержней тонкостенного профиля. Вопросам напряженно-деформированного состояния и устойчивости тонкостенных конструкций посвящены исследования [1 - 6]. В работах [4, 5] рассмотрены новые тонкостенные конечные элементы, отличающиеся количеством степеней свободы, зависящим от степени аппроксимации функций деформаций. В статье [4] реализован алгоритм расчета тонкостенных стержневых систем по полусдвиговой и бессдвиговой теориям методом конечных элементов. Численный метод анализа напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержневых систем открытого и замкнутого профиля рассмотрено в работе [5]. В данной работе используется полусдвиговая теория В.И. Сливкера, где учитывается только часть деформации сдвига, возникающая при кручении. В данной статье излагается вариационный метод расчета тонкостенных стержневых систем открытого профиля. Для определения напряженно-деформированного состояния стержневой системы используется вариационный принцип Лагранжа и его реализация, описанная в работах [7 - 10]. Отличительной особенностью предлагаемого метода заключается в том, что он основан на простейших деформационных соотношениях для прямолинейного стержня и позволяет рассчитывать сложные стержневые системы, элементами которых могут быть и криволинейные естественно закрученные стержни. При определении напряженно-деформированного состояния стержней при изгибе и при кручении применяются следующие основные гипотезы теории Тимошенко и гипотезы, принятые в теории тонкостенных стержней с учетом сдвигов [2]:

- гипотеза неизменяемости контура, в соответствии с которой профиль стержня в плоскости поперечного сечения перемещается как абсолютно твердое тело;
- гипотеза ненадавливания, согласно которой продольные волокна тонкостенного стержня не взаимодействуют друг с другом в перпендикулярных к ним направлениях;
- гипотеза безмоментности оболочки, согласно которой, составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к профилю поперечного сечения стержня (к срединной поверхности) равны нулю;
- гипотеза плоских сечений, согласно которой, поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации;
- изгибные напряжения, возникающие в плоскости проходящей через главную ось поперечного сечения стержня, постоянны по ширине сечения;
- гипотеза о линейном законе распределения напряжений по толщине оболочки.

Напряженно-деформированное состояние тонкостенной стержневой системы определяется вариационным методом. Для определения перемещений в элементах используется вариационное соотношение: $\delta U = 0$, (1) где U - вариация потенциальной энергии деформации

стержневой системы; - вариация работы внешних нагрузок. При определении деформаций и напряжений, вводится декартова система координат, с осью, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения (рис. 1). Входящую в условие (1) вариацию потенциальной энергии деформаций тонкостенной стержневой системы, в соответствии с [3], записываем в виде: (2) Здесь, - длина и площади сечений элементов стержневой системы; - соответственно, модули упругости и сдвига материала; - деформации, определяемые в фиксированной точке, в локальной системе координат, с осями, , направленные по касательной и по нормали к профилю стержня (рис. 1). Особенностью выражения для потенциальной энергии деформации (2) является то, что в нем входит деформация, выражение для которой отличается от выражения, известного в теории тонкостенных стержней [2]. При решении задачи входящие в (2) деформации вычисляются на основе методики, которая изложена в статье [7]. Если деформации, возникающие в материале, упругие, то напряжения определяются по закону Гука: , . (3) где (4) Рис. 1 В выражениях (3) и (4) - постоянное по толщине стенки усредненный сдвиг; - сдвиг при чистом кручении, распределенное по толщине стенки по линейному закону. Деформации определяются по соотношениям, (5). Здесь, , , - перемещения и углы поворота поперечных сечений стержня относительно осей Ox , Oy , Oz ; - функция меры депланации; - главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня; - длина перпендикуляра, проведенного из начала координат $Oxyz$ к касательной к линии в точке; - секториальная площадь профиля; - направляющие косинусы осей, ; - поправочный коэффициент. Введение поправочного коэффициента в выражение для объясняется тем, что в соответствии с [2], при чистом кручении узкой полосы, касательные напряжения и вносят одинаковый вклад в величину момента чистого кручения. Следовательно, (6) причем Так как принята гипотезе о безмоментности, и полагается, то получается, что момент чистого кручения в теории тонкостенных стержней будет создаваться только напряжением и справедливо равенство. Для компенсации отсутствия напряжения в выражениях для потенциальной энергии деформации (2) и для момента чистого кручения, в формуле (5) для вводится коэффициент. При решении задачи, вводится глобальная ортогональная система координат в котором определяются векторы перемещений, углов поворота и меры депланации поперечных сечений стержня. Перемещения, углы поворота, мера депланации в локальной и глобальной системах координат связаны соотношениями, , , , (7) где - направляющие косинусы локальной системы координат. Вариация работы распределенных и сосредоточенных внешних сил имеет вид: где, , , , , - проекции на оси глобальной системы координат распределенных по длине стержня сил и моментов, - проекция бимоментной распределенной нагрузки на ось; - проекции сосредоточенных сил, приложенных в точках продольной оси стержня с координатой; - то же, моментов,

действующих в точках с координатой x . Компоненты вектора перемещений u, v, w , углов поворота и меры деформации на каждом участке стержневой системы представляются в виде следующих рядов: $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x), w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)$. (9) Здесь $u_n(x)$ - функция формы, определяемая выражениями $u_n(x) = \frac{1}{l} \int_0^x u_n(\xi) d\xi$, где l - длина продольной оси стержня, отсчитываемая, от начала участка до рассматриваемой точки; $u_n(x)$ - длина участка стержня; $u_n(x)$. После подстановки в условие (1) выражений вариации потенциальной энергии (2), вариации работы внешних сил (8), с учетом соотношений (7), (9) получим систему алгебраических уравнений $A \cdot X = F$, (10) где A - матрица жесткости стержневой конструкции; X - вектор неизвестных коэффициентов u_n, v_n, w_n , где u_n, v_n, w_n ; F - вектор, зависящий от внешних нагрузок. При вычислении интегралов, входящих в вариационное уравнение (1), используется численное интегрирование с использованием формулы Гаусса. Интегрирование проводится по длине стержней и по площади их поперечных сечений, согласно методике, описанное в [10]. Решая систему уравнений (8) находим неизвестные коэффициенты u_n, v_n, w_n . Затем, по формулам (7), (9) определяются перемещения и с использованием соотношений (3) и (5) вычисляются деформации и напряжения. Внутренние усилия и моменты, возникающие в поперечных сечениях тонкостенного стержня, вычисляются по формулам: $M_x = \int_0^x M_x(\xi) d\xi, M_y = \int_0^x M_y(\xi) d\xi, M_z = \int_0^x M_z(\xi) d\xi$. (11) В соотношениях (11) касательные напряжения определяется по формуле, которое получено на основе уравнений равновесия отсеченной части стержня Здесь A , где A - площадь отсеченной части сечения. Для оценки достоверности предлагаемой методики приведем нижеследующие тестовые примеры. Представим данные расчетов статически определимого и статически неопределимого стержней, представленных на рис. 2,а,б. Сечение стержней и геометрические характеристики сечения приведены на рис. 2,в и в таблице 1. Характеристики материала стержней: $E = 2 \cdot 10^4$, $\nu = 0,3$. Интенсивность распределенной нагрузки $q = 1$, эксцентриситет приложения распределенных нагрузок $e = 0,1$. Рис. 2 - Расчетная схема статически определимого (а) и неопределимого (б) стержней; сечение стержней (в) Таблица 1 Момент инерции при свободном кручении Секториальный момент инерции Осевой момент инерции Результаты расчета статически определимого и неопределимого стержней приведены в таблице 2. Для сравнения в таблице также приведены результаты расчетов указанных стержней по методике, изложенное в [4], и по технической теории З.В. Власова [6]. Из сравнения приведенных результатов видно, что данные, полученные по предлагаемой методике совпадают с результатами расчетов, полученные в работе [4] и с результатами, полученными по теории З.В. Власова (наибольшее расхождение результатов не превышает 4 %). Таблица 2 Статически определимый стержень

Определяемые параметры	По предлагаемому методу	По технической теории В.З. Власова
Координаты сечения стержня	0,0226 0,00857 0,000993	0,0225 0,00856 0,000993
При При При		
Определяемые параметры	По предлагаемому методу	-0,00024 0,000897 0,000116

По методике, изложенное в [4] -0,00023 0,00091 0,0001165 По технической теории В.З. Власова -0,00024 0,000917 0,000115 Выполнен расчет консольного криволинейного стержня (рис. 3,а), нагруженного сосредоточенным моментом . Форма сечения стержня, её геометрические характеристики и характеристики материала стержня приведены на рис. 3,б и в таблице 3. Таблица 3 Модуль упругости материала Модуль сдвига Момент инерции при свободном кручении Секториальный момент инерции Осевой момент инерции Результаты расчетов приведены в таблице 4. В этой таблице приведены максимальные значения угла закручивания, крутящего момента и бимоента в сечениях рассматриваемого стержня. Для сопоставления в указанной таблице также приведены результаты расчета заданного стержня по программе ANSYS. Наибольшее расхождение результатов, как это видно из таблицы, находится в пределах 1,5% . Таблица 4

Определяемые параметры	По предлагаемому методу	0,4938	10,0	15,0	По программе ANSYS
0,4984	10,0	15,179	Выводы	· Полученные расчетные данные по предлагаемой методике совпадают с результатами расчетов по технической теории З.В.Власова и с результатами, полученными с помощью программы ANSYS;	· Результаты расчетов показывают, что изложенное в [7] метод расчета криволинейных, естественно-закрученных стержней, основанного на простейших деформационных соотношениях для прямолинейного стержня, можно распространить и для тонкостенных стержней, поперечное сечение которых составлено как из прямолинейных, так и криволинейных участков.