

Введение Поведению пластинчатых систем, контактирующих с упругой средой, посвящено достаточно большое число работ. Практически нет публикаций, связанных с расчетом таких систем в упругой среде с учетом нелинейной диаграммы деформирования материала оболочек. Здесь разрабатывается методика расчета физически нелинейных пластинчатых систем типа призматических оболочек, взаимодействующих с упругой средой. Как плиты находящиеся в упругой среде можно считать и ребристые плиты, т.к. влияние ребер на напряженно-деформированное состояние плиты можно учитывать в виде упругого основания по винклеровской модели. В настоящее время находят широкое применение пластинки и оболочки в различных областях - строительство, машиностроение, авиастроение, кораблестроение, приборостроение и т.д. Если подходить строго к диаграмме деформирования материалов, то практически все они обладают физической нелинейностью в той или иной степени. А такие материалы, как бетон, различные сплавы, пластмассы, композиты имеют достаточно сильную физическую нелинейность. В данной работе рассматривается упругая среда как однослойное основание. Для вывода дифференциальных уравнений равновесия используется энергетический метод. Конечные уравнения реализуются численным методом Рунге-Кутты. В качестве примера рассмотрена П-образная система, контактирующая с упругой средой. Представлена оценка влияния упругой среды и физической нелинейности на напряженно-деформированное состояние пластинчатой системы.

1. Дифференциальные уравнения равновесия

Предполагаем, что пластинчатые системы могут располагаться в упругой среде полностью или частично. В данной статье в качестве расчетной модели упругой среды принята однослойная модель. Также в основу разрабатываемой методики расчета закладывается модель нелинейно-упругого материала пластинчатой системы. Экспериментальные данные таких материалов, как бетон, различные сплавы, композиты, показывают, что зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций ϵ_i можно принять в виде кубического полинома (1.1) где E - начальный модуль упругости, E_1 - постоянная, учитывающая степень нелинейности материала (принимается на основании экспериментальных данных). Например, уравнением (1.1) достаточно хорошо описываются кривые деформирования бетона, композитов, сплавов, некоторых видов сталей. Так в зависимости от марки бетона и возраста [3, 4] указанные величины можно принять в следующих пределах: $E=2 \times 10^4 - 4,5 \times 10^4$ МПа., $E_1=1,5 \times 10^{10} - 6,5 \times 10^{10}$ МПа. Для композита марки ЭДФ -5-6 [5] в зависимости от укладки основы - $E=1,9 \times 10^4 - 2,7 \times 10^4$ МПа., $E_1=1,4 \times 10^7 - 2,6 \times 10^7$ МПа., а стали марки 20Н5А [6] - $E= 2 \times 10^5$ МПа., $E_1=2 \times 10^{10}$ МПа. Учитываем гипотезы Кирхгофа-Лява. Полагаем, что направляющие тензоров напряжений и деформаций совпадают. Используем известные соотношения между деформациями и перемещениями: (1.2) где Величины u , v и w - соответствуют компонентам вектора перемещений точки К

срединной поверхности пластинчатой системы в продольном x , поперечном s и нормальном z направлениях (рис.1). Двумерная задача сводится к одномерной. Перемещения выражаются по В.З.Власову [2] и принимаются в виде разложений:

(1.3) Рис. 1 - Схема оболочки в упругом деформируемом слое толщиной h . Выражения интенсивности деформаций ϵ_i и объемной деформации q с учетом гипотез Кирхгофа-Лява и сжимаемости материала ($\epsilon_z = 0$, $\epsilon_{xz} = 0$, $\epsilon_{sz} = 0$) можно записать следующим образом: (1.4) (1.5) (1.6) Учитывая соотношение (1.6), получим формулу для квадрата интенсивности деформаций (1.7) где ν - коэффициент Пуассона. Вводим следующие обозначения: (1.8) тогда формула (1.7) принимает более компактный вид: (1.9) Составим удельную энергию изменения объема и формы [7]: (1.10) где K - модуль объемного сжатия. Подставляя в (1.10) соотношения (1.1 - 1.9), получим (1.11) Работа, отнесенная к единице площади поверхности оболочки равна (1.12) где h - толщина элемента пластинчатой системы. Подставляя (1.11) в (1.12), получим (1.13) где Следуя В.З.Власову [2] пространственную пластинчатую систему принимаем дискретно-континуальной. Выбор координатных функций осуществляется по виду деформированного состояния системы. Искомые функции являются обобщенными перемещениями и подлежат определению из решения задачи. В дальнейших записях функций переменные, указанные в скобках опускаем. Составляем полную энергию для системы (1.14) где q_x , q_s , q_z - интенсивности нагрузок, действующих на систему в продольном, поперечном и нормальном направлениях. Из условий совместности деформаций в местах соединений пластинчатой системы можно принять при $d = k$, (1.15) а углы между пластинами учитываются при выборе координатных функций. Определим минимум функционала (1.14), используя уравнения Эйлера-Лагранжа [8]: (1.16) где F - подинтегральная функция (1.14), штрихи означают обычные производные от функций по переменной x . Полагаем, что прогибы пластин системы совпадают с осадкой упругой среды. Развернув уравнения (1.16), и присоединив работу реактивных давлений упругой среды [2] соответственно в продольном и нормальном направлениях: (1.17) получим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений равновесия пластинчатой системы в упругой среде: где (1.19) В коэффициентах под интегралы включаются координатные функции только тех пластин системы, которые взаимодействуют с упругой средой. Остальные коэффициенты линейной части уравнений (1.18) имеют следующий вид: (1.20) В уравнениях и в коэффициентах приняты следующие обозначения: E_0 , ν_0 - соответствуют модулю деформации и коэффициенту Пуассона упругой среды; h_m - толщина деформируемого слоя упругой среды (индекс m показывает номера слоев, взаимодействующих с различными гранями системы см. рис. 1), которая может быть разной для различных граней; E , G , ν - соответствуют модулю упругости, модулю сдвига и коэффициенту Пуассона материала пластинчатой системы. Если толщина деформируемого слоя среды

для всех граней пластинчатой системы одинакова, то принимаем $H_m = H$. Выражения $1\Phi_j$ и $2\Phi_h$ в (1.18) учитывают физическую нелинейность материала оболочки и имеют следующий вид: (1.21) В (1.21) индексы после запятой указывают на дифференцирование по данным переменным, а функции находящиеся под интегралами записываются следующим образом: (1.22) где $= 12 E_2 d$; $= 3 E_2 d^5/20$; $= E_2 d^3$; $E_2 = E_1/E(1+n)^2$. Выражения (1.21) и (1.22) полностью будут совпадать с [1], если решать задачу с учетом физической и геометрической нелинейностей. В оболочках средней длины можно пренебречь работой продольных изгибающих моментов M_x , и в системе уравнений (1.18) следует принять $e_{hk}=0$, (1.23) что приводит к существенному понижению порядка системы.

2. Анализ результатов расчета Конечная реализация нелинейных дифференциальных уравнений осуществляется на ЭВМ численным методом Рунге-Кутты по программе, составленной на языке Фортран. На основании уравнений (1.18) рассчитывалась П-образная пластинчатая система, когда верхняя и правая пластины контактируют с упругой средой, а внешняя равномерно распределенная нагрузка q , расположенная в плоскости верхней грани (см. [2]) действует по левому верхнему краю в поперечном направлении по всей длине оболочки. Оболочка по торцам заделана в абсолютно жесткий неподвижный массив. Геометрические параметры призматической системы принимались следующие: $\delta/a = 1/10$ - отношение толщины к поперечному размеру; $l/a = 5 - 9$ отношение длины к поперечному размеру; $H_1/a = H/a = 2.5$ - отношение толщины деформируемых слоев к поперечному размеру оболочки. Физические постоянные - $E_1/E = 105$, $\nu = 0$, $E_0/G = 0.004$, $\nu_0 = 0.3$. $Q = q/G\delta = 5 \cdot 10^{-5}$ - относительная величина нагрузки. Согласно действующей нагрузке перемещения принимаем в виде следующих разложений [2]: (2.1) При составлении функций и $f_1(s)$ обходим контур по часовой стрелке, начиная с левой опоры. Продольные перемещения $u(x,s)$ двух точек, симметричных относительно оси y , сечения $x=\text{const}$ будут равны по величине, но противоположны по знаку. Учитывая, что нагрузку можно представить как обратно симметричную, то получаем один параметр обобщенного перемещения $U_1(x)$ и принимаем соответствующее ему продольное перемещение верхнего правого угла. Обобщенным контурным перемещениям пластин в своей плоскости $V_1(x)$ соответствует функция $\cdot$. Дифференциальные уравнения типа (1.18) для данной системы с учетом (1.23) будут иметь следующий вид: При определении коэффициентов $\cdot$, входящих в состав коэффициентов $\cdot$, будут входить под интегралы координатные функции t . к. с упругой средой взаимодействуют верхняя и правая боковая пластины. Для вычисления этих коэффициентов используем формулы (1.19). Граничные условия для пластинчатой системы с торцами, заделанными в абсолютно жесткий неподвижный массив, запишутся так: при $x=0$ и $x=l$: $U_i(x)=0$; $V_k(x) = 0$; (2.3) На основании численного решения уравнений (2.2) совместно с граничными условиями (2.3) на рис. 2, 3 построены

графики. Заключение Из графиков видно (рис. 2, 3), что упругая среда значительно может снижать напряженно-деформированное состояние оболочек. При учете физической нелинейности увеличиваются перемещения в призматической системе. Если учитывать одновременно упругую среду и нелинейное деформирование материала оболочки, то при определенных соотношениях степени физической нелинейности и модуля деформации упругой среды напряженно-деформированное состояние пластинчатой системы можно определять по линейной теории. Рис. 2 - Графики изменения наибольшей относительной деформации контура в угловой точке С сечения а-а в зависимости от изменения длины оболочки с учетом упругой среды $E_0/G=0,004$ и без учета $E_0/G=0$: 1 и 2 - по линейной теории, 3 и 4 - при учете физической нелинейности Рис. 3 - Графики изменения относительной депланации по длине оболочки с учетом упругой среды $E_0/G=0,004$ и без учета $E_0/G=0$: 1 и 2 - по линейной теории, 3 и 4 - при учете физической нелинейности Таким образом, на основании изложенной методики можно исследовать физически нелинейные пластинчатые системы, взаимодействующие с упругой средой.