

## ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 532.526:519.63

DOI 10.55421/3034-4689\_2025\_28\_11\_130

И. С. Миргородский, Ф. Х. Тазюков, Ф. Р. Карибуллина,  
И. Н. Мусин

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕШЁТОК БОЛЬЦМАНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

*Ключевые слова:* метод решёток Больцмана, обтекание цилиндра.

Метод решёток Больцмана (*Lattice Boltzmann Method, LBM*) основан на кинетической теории газов и представляет собой мощный инструмент вычислительной гидродинамики и начинает получать широкое распространение благодаря своей простоте и эффективности при моделировании различных физических процессов. В данной работе рассматривается применение LBM для численного исследования обтекания цилиндрических препятствий в плоском щелевом канале. Особое внимание уделяется влиянию положения цилиндра на формирование дорожки Кармана и характеристикам течения. Вычислительная область представляет собой канал размером 1000 на 100 ячеек, в котором размещено цилиндрическое препятствие. Центр цилиндра последовательно устанавливался в трёх положениях: на оси симметрии канала и со смещением вверх. Результаты моделирования показали, что смещение цилиндра от центральной оси канала существенно влияет на параметры вихревой дорожки. При смещении цилиндра наблюдалось изменение структуры потока. Это объясняется асимметричным распределением скорости потока вокруг цилиндра при его смещении к стенке канала, что приводит к изменению условий отрыва вихрей. Полученные результаты демонстрируют влияние положения препятствия на образование и эволюцию вихрей и подтверждают эффективность применения метода LBM для моделирования подобных задач. Представлено также обтекание системы препятствий. Данное исследование способствует более глубокому пониманию механизмов формирования вихревой дорожки Кармана и может быть полезным при проектировании охлаждающих решёток и других инженерных систем, где необходимо учитывать взаимодействие потока с нагретыми элементами конструкций. Таким образом, применение метода решёток Больцмана в задачах моделирования течений жидкости с учетом сложных геометрических форм и различных граничных условий демонстрирует его высокую эффективность и потенциал для решения широкого спектра инженерных и научных задач.

I. S. Mirgorodskiy, F. Kh. Tazyukov, F. R. Karibullina,  
I. N. Musin

### APPLICATION OF THE LATTICE BOLTZMANN METHOD TO MODELING FLOW AROUND CYLINDRICAL OBSTACLES IN A FLAT CHANNEL

*Keywords:* lattice Boltzmann method, flow around a cylinder.

The Lattice Boltzmann Method (LBM) is based on the kinetic theory of gases and is a powerful tool in computational fluid dynamics, which is beginning to gain widespread acceptance due to its simplicity and efficiency in modeling various physical processes. This paper discusses the application of LBM to numerically study the flow past cylindrical obstacles in a flat slot channel. Particular attention is paid to the influence of the cylinder position on the formation of the Karman street and the flow characteristics. The computational domain is a channel measuring 1000 by 100 cells, in which a cylindrical obstacle is placed. The center of the cylinder was successively installed in three positions: on the channel symmetry axis and with an upward offset. The simulation results showed that the displacement of the cylinder from the central axis of the channel significantly affects the vortex street parameters. When the cylinder was shifted, a change in the flow structure was observed. This is explained by the asymmetric distribution of the flow velocity around the cylinder when it is shifted toward the channel wall, which leads to a change in the vortex separation conditions. The obtained results demonstrate the influence of the obstacle position on the formation and evolution of vortices and confirm the efficiency of the LBM method for modeling such problems. The flow around the obstacle system is also presented. This study contributes to a deeper understanding of the mechanisms of the Karman vortex street formation and can be useful in the design of cooling grates and other engineering systems where it is necessary to take into account the interaction of the flow with heated structural element. Thus, the application of the lattice Boltzmann method in problems of modeling fluid flows taking into account complex geometric shapes and various boundary conditions demonstrates its high efficiency and potential for solving a wide range of engineering and scientific problems.

#### Введение

Метод решёток Больцмана представляет собой современный численный подход к исследованию течений жидкостей и газов, широко применяемый при моделировании процессов, происходящих в биомедицинской практике, в том числе в гемодинамике. Он основан на решении уравнения

Больцмана [1-6] и позволяет эффективно рассчитывать сложные гидродинамические процессы [7-9]. В отличие от традиционных методов на основе уравнений Навье-Стокса, LBM легко адаптируется к течениям в каналах с препятствиями, естественным образом включает в себя макроскопические эффекты

и хорошо масштабируется на параллельных вычислительных системах [10-15].

*Основные преимущества метода LBM:*

- простота реализации на сложных сетках;
- возможность естественного включения многофазных и многокомпонентных течений с подвижными границами;
- высокая производительность при моделировании турбулентных потоков.

*Недостатки метода LBM:*

- практически не работает в случаях больших значений чисел Маха ( $M > 1$ ) и Кнудсена ( $Kn > 1$ ).

В данной работе рассматриваются основы метода решёток Больцмана, его численная реализация, а также некоторые практические задачи моделирования обтекания цилиндрических препятствий. Целью работы является получение структуры потока при обтекании одиночных препятствий и системы препятствий с помощью решения уравнения Больцмана.

*Теоретические основы метода решёток Больцмана*

Уравнение Больцмана является фундаментальным уравнением в статистической механике и описывает эволюцию функции распределения частиц в фазовом шестимерном пространстве. Оно учитывает как свободное движение частиц, так и их взаимные парные столкновения, что позволяет моделировать течение как разреженных газов, ньютоновских и неニュтоновских жидкостей с учетом линии раздела фаз и фазовых переходов, так и распределение температуры в элементах конструкций.

В общем виде уравнение Больцмана записывается следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \Omega, \quad (1)$$

где  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  - функция распределения, определяющая плотность вероятности нахождения частицы в точке  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  со скоростью  $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$  в момент времени  $t$ ;  $\mathbf{F}$  — внешняя сила, действующая на частицы;

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \nabla_{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{\partial}{\partial v_3},$$

где  $\Omega$  — интеграл столкновений, описывающий изменение функции распределения вследствие парного упругого взаимодействия частиц.

Решение этого уравнения позволяет получать макроскопические параметры системы, такие как давление, напряжение, скорость и температуру среды через моменты функции распределения. Однако, из-за нелинейности интеграла столкновений, аналитическое решение уравнения Больцмана возможно лишь в ограниченном числе частных случаев. К настоящему времени разработаны различные приближенные модели и численные методы для решения уравнения Больцмана.

*Приближение Бхатнагара–Гросса–Крука (BGK)*

Одной из наиболее распространённых моделей для упрощения интеграла столкновений является приближение Бхатнагара–Гросса–Крука (BGK). В

этом приближении предполагается, что столкновения являются парными и абсолютно упругими. В результате столкновений система выводится из локального равновесного состояния и в дальнейшем, за определенное время релаксации  $\tau$ , возвращается к локальному термодинамическому равновесию. Интеграл столкновений в модели BGK аппроксимируется следующим образом [1-3]

$$\Omega = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq}), \quad (2)$$

где  $f^{eq}$  — локальная равновесная (максвелловская) функция распределения;  $\tau$  — время релаксации, т.е. время, за которое система возвращается в состояние локального равновесия.

Данное приближение значительно упрощает численную реализацию метода, сохраняя при этом основные физические свойства процесса.

*Дискретизация уравнения Больцмана*

В методе LBM на область течения накладывается, определенным образом сконструированная решётка, а поле скоростей — на конечное число разрешенных направлений, соответствующих возможным движениям частиц между узлами решётки. Это приводит, при отсутствии внешних сил, к следующему виду дискретной формы уравнения Больцмана:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)), \quad (3)$$

где  $f_i$  — дискретная функция распределения, соответствующая  $i$ -ой частице;  $\mathbf{e}_i$  — дискретные скорости, определяющие разрешенные направления движения частицы;  $\Delta t$  — фиксированный шаг по времени.

Выбор набора дискретных скоростей  $\mathbf{e}_i$  и соответствующих весовых коэффициентов определяется конкретной моделью решётки, такой как D2Q9 для двумерных или D3Q19 для трёхмерных задач. Эти модели обеспечивают сохранение основных моментов функции распределения и соответствие макроскопическим уравнениям гидродинамики, таким как уравнения движения сплошной среды Навье–Стокса [2].

Дискретизация уравнения Больцмана с учетом приближения BGK позволяет эффективно реализовывать численное решение задач гидродинамики при различных типах граничных условий.

*Функции распределения и основные параметры потока*

В методе решёток Больцмана макроскопическое состояние жидкости, включающее в себя вычисление плотности, скорости и напряжений, определяется через моменты функции распределения  $f_i(\mathbf{x}, t)$ , которая характеризует плотность вероятности нахождения частицы в 6-ти мерном фазовом пространстве. Макроскопическая плотность  $\rho$  в точке  $\mathbf{x}$  и в момент времени  $t$  определяется суммированием всех функций распределения по всем разрешенным направлениям:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

Скорость потока  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  вычисляется как взвешенная сумма функций распределения,

умноженных на соответствующие дискретные скорости  $e_i$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \sum_i f_i(x, t) e_i. \quad (5)$$

Равновесная функция распределения  $f_i^{\text{eq}}$  играет важную роль в процессе столкновений и определяется следующим образом [4]

$$f_i^{\text{eq}} = w_i \rho \left[ 1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u \cdot u}{2c_s^2} \right], \quad (6)$$

где  $w_i$  — весовые коэффициенты, зависящие от выбранной модели решётки;  $c_s$  — модельная скорость звука

$$c_s^2 = RT, \quad (7)$$

где  $R$  — газовая постоянная;  $T$  — температура. В случае плоской решётки (рис.1)

$$c_s = 1/\sqrt{3}.$$

Функция  $f_i^{\text{eq}}$  обеспечивает соответствие между микроскопическими динамическими процессами и макроскопическими свойствами потока, такими как плотность, скорость и напряжения.

#### Регулярная сетка

В методе решёток Больцмана вычислительная область покрывается решёткой состоящей из узлов, в которых хранятся значения функции распределения частиц. Эти узлы представляют собой точки пространства, где вычисляются макроскопические параметры, такие как плотность и скорость жидкости.

Каждый узел соединён с соседними узлами посредством разрешённых направлений векторов скорости, определяющих направление и величину скорости движения частиц между узлами на одном временном шаге. Выбор конкретного типа решётки и набора векторов скорости влияет на точность и устойчивость процесса моделирования.

В LBM используются различные типы решёток, обозначаемые как  $D^nQ^m$ , где  $n$  — размерность пространства, а  $m$  — количество разрешённых направлений для векторов скорости. Например, в двумерном случае часто применяется решётка D2Q9, включающая 9 направлений: покой (нулевой вектор), четыре направления по осям координат и четыре по диагоналям, как показано на рис.1.

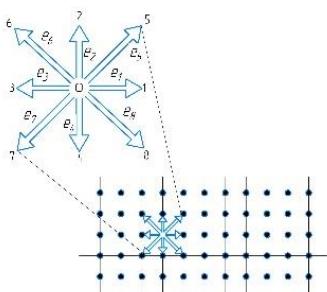


Рис. 1 – Схема разрешенных направлений перемещения частицы

Fig. 1 – Scheme of allowed directions of particle movement

Метод решёток Больцмана представляет собой мощный инструмент для численного моделирования гидродинамических процессов. Его популярность

обусловлена простотой алгоритма, эффективной параллелизацией и способностью работать с различными типами граничных условий. В работе рассмотрены основные аспекты численной реализации LBM, включая выбор дискретных скоростей, этапы вычислений и блок-схему алгоритма.

#### Численный метод LBM. Дискретные скорости

В методе LBM пространственное распределение скоростей заменяется дискретным набором разрешенных направлений, что позволяет перейти от непрерывного уравнения Больцмана к его дискретной форме. Выбор набора дискретных скоростей определяется размерностью задачи и необходимой точностью.

В модели D2Q9 дискретные скорости  $e_i$  и веса  $w_i$  определяются в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Дискретные скорости  $e_i$  и веса  $w_i$  в модели D2Q9 для заданных  $i$

Table 1 – Discrete speeds  $e_i$  and  $w_i$  weight in the D2Q9 model for given  $i$

$i$	$e_i$	$w_i$
0	(0, 0)	4/9
1	(1, 0)	1/9
2	(0, 1)	1/9
3	(-1, 0)	1/9
4	(0, -1)	1/9
5	(1, 1)	1/36
6	(-1, 1)	1/36
7	(-1, -1)	1/36
8	(1, -1)	1/36

Выбор модели зависит от специфики задачи. Модель D2Q9 широко используется для двумерных течений, в то время как D3Q19 применяется для трёхмерных задач.

#### Основные этапы вычислений

Алгоритм LBM состоит из последовательности шагов, повторяющихся на каждом временном шаге.

1. Инициализация. Задание начальных условий для функций распределения  $f_i(x, 0)$  на всей вычислительной области. Начальные значения обычно выбираются исходя из макроскопических параметров, таких как плотность и скорость.

2. Стreamинг (Streaming). Частицы перемещаются в соответствии с вероятными направлениями функции распределения

$$f_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t). \quad (8)$$

3. Коллайдинг (Colliding). После стreamинга, функции распределения обновляются с учётом столкновений, что выводит их из состояния локального равновесия. В дальнейшем, с учетом BGK аппроксимации, функция распределения возвращается в состояние локального равновесия за время релаксации  $\tau$ .

4. Применение граничных условий. На границах расчетной области происходит корректировка функций распределения в соответствии с физическими условиями задачи. Эти условия могут включать методы отражения на твердых стенах, а также периодические условия на входных/выходных границах.

5. Постобработка. Здесь происходит вычисление макроскопических величин, таких как плотность  $\rho$  и скорость  $u$ , через моменты функции распределения (4) (5). Эти шаги повторяются на каждом временном шаге до достижения заданного времени моделирования или достижения установившегося решения.

#### Блок-схема вычислений

Ниже представлена блок-схема алгоритма LBM:

1. Начало.
2. Инициализация. Задание начальных условий

$$f_i(x, 0). \quad (9)$$

3. Цикл по времени.
- Стиминг.
- Коллайдинг.

$$f_i(x, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)). \quad (10)$$

- Применение граничных условий. Происходит корректировка  $f_i$  на границах.

- Постобработка. Проводится вычисление  $\rho$  и  $u$ , а также выводятся результаты моделирования в удобной для дальнейшего анализа форме.

4. Проверка условия завершения. Если достигнуто конечное время или получено стационарное состояние, то происходит переход к завершению, иначе — переход к шагу 3.

Этот цикл повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто стационарное состояние или пройдено заданное количество временных шагов.

#### Переход от физических величин к безразмерным параметрам модели

В методе решёток Больцмана для эффективного численного моделирования необходимо перейти от физических величин к безразмерным параметрам, соответствующим дискретной решётке. Этот процесс включает масштабирование пространственных и временных координат, а также физических величин, таких как скорость, плотность и вязкость.

Кинематическая вязкость  $\nu$  в LBM связана с временем релаксации  $\tau$  следующим образом [4]

$$\nu = c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \Delta t. \quad (11)$$

Безразмерные параметры позволяют определить важные критерии подобия, такие как число Рейнольдса

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (12)$$

где  $U$  — характерная скорость, м/с  $L$  — характерный размер, м.

Процедура перехода к безразмерным параметрам происходит по следующим этапам:

1. Определение характерных величин. Задаются характерные линейные размеры  $L$  и характерное время процесса  $T$ .

2. Масштабирование физических величин. В результате масштабирования получаем безразмерные комплексы.

3. Настройка параметров модели. Задается шаг решётки  $\Delta x$  и шаг по времени  $\Delta t$ .

4. Определение параметра релаксации. Рассчитывается время релаксации  $\tau$  на основе

заданного числа Рейнольдса и выбранных параметров.

Переход к безразмерным параметрам позволяет унифицировать описание различных физических процессов и обеспечивает масштабируемость модели при численном моделировании методом решёток Больцмана.

#### Классификация граничных условий

В LBM граничные условия можно классифицировать следующим образом:

- Границы твёрдых стенок: описание взаимодействия жидкости с неподвижными или подвижными твёрдыми поверхностями.

- Входные и выходные границы: задание условий на входе и выходе потока, таких как фиксированная скорость или давление.

- Периодические границы: используются, когда система обладает периодичностью, и значения на одной границе совпадают со значениями на противоположной.

#### Граничные условия для твёрдых стенок

Одним из простейших и наиболее распространённых методов задания граничных условий на твёрдых стенках является метод "отражения" (bounce-back). В этом подходе частицы, сталкивающиеся с твёрдой поверхностью, отражаются обратно в направлении, откуда они пришли, что соответствует условию прилипания на стенке. Этот метод прост в реализации и широко используется в LBM. Однако на практике может приводить к определенным погрешностям.

#### Входные и выходные граничные условия

Для задания входных и выходных условий часто применяются следующие подходы:

- Задание скорости (velocity boundary conditions): на входе или выходе области моделирования устанавливается фиксированное значение скорости потока либо ее градиент.

- Задание давления (pressure boundary conditions): устанавливается фиксированное значение давления на границе.

Реализация таких условий может быть выполнена через различные методы, включая использование функций распределения и их модификацию на границах [3].

#### Периодические граничные условия

Периодические граничные условия применяются в системах, где предполагается повторяющаяся структура потока. В этом случае значения функций распределения на одной границе копируются на противоположную границу, обеспечивая непрерывность потока через границы вычислительной области.

#### Исследование влияния положения частицы в канале на структуру потока

В данном разделе исследуется влияние смещения цилиндрического препятствия от оси канала на структуру потока при его обтекании, а также на возможность образования вихревой дорожки Кармана.

#### Параметры модели

Вычислительная область представляет собой канал размером 1000 на 100 ячеек, в котором

размещено цилиндрическое препятствие радиусом 25 ячеек. Центр цилиндра последовательно устанавливался в трёх положениях: (300; 50), (300; 60) и (300; 70). На входе канала задавалось постоянное значение скорости потока (0.1; 0), а на выходе использовалось граничное условие фон Неймана с нулевым градиентом скорости («мягкое» граничное условие). Стенки канала и поверхность цилиндра моделировались с использованием условия прилипания (no-slip) посредством метода отражения (bounce-back). Параметры модели подобраны таким образом, чтобы физические свойства обтекающей препятствие жидкости соответствовали воде при нормальных условиях.

## Результаты

Результаты моделирования представлены на рис.2 – 5.

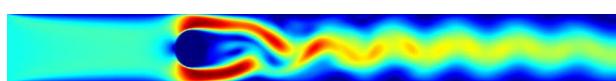


Рис. 2 – Структура потока в канале с препятствием в виде цилиндра с центром в (300, 50)

Fig. 2 – The flow structure in the channel with an obstacle in the form of a cylinder with the center at (300, 50)

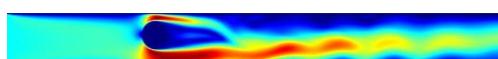


Рис. 3 – Структура потока в канале с препятствием в виде цилиндра с центром в (300, 60)

Fig. 3 - The flow structure in the channel with an obstacle in the form of a cylinder with the center at (300, 60)

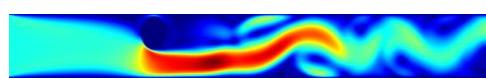


Рис. 4 – Структура потока в канале с препятствием в виде цилиндра с центром в (300, 70)

Fig. 4 – The flow structure in the channel with an obstacle in the form of a cylinder with the center at (300, 70)

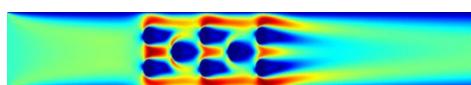


Рис. 5 – Обтекание системы препятствий цилиндрической формы

Fig. 5 – The flow around a system of obstacles cylindrical shape

Анализ результатов расчетов позволяют определить влияние положения цилиндра на характеристики его обтекания.

Эти изменения связаны в первую очередь с асимметрией потока, возникающей из-за смещения цилиндра. Вблизи стенки канала скорость потока обычно ниже вследствие влияния эффектов вязкости

и наличия пограничного слоя. Смещение цилиндра к стенке приводит к неравномерному распределению скорости вокруг него, что влияет на процесс отрыва вихрей.

В результате асимметричного обтекания изменяются условия для формирования вихрей с каждой стороны цилиндра, что сказывается на изменении частоты их срыва и, соответственно, на увеличении длины волны вихревой дорожки (рис.2-4).

На рис.5 представлены результаты моделирования обтекания системы цилиндрических препятствий в плоском щелевом канале. Можно видеть структуру потока при таком обтекании и учитывать ее при создании различных конструкций турбулизации потоков и систем охлаждения.

Понимание влияния положения и количества препятствий важно также для прогнозирования изменения направления потоков в различных физиологических моделях кровеносных сосудов и иных моделях, где могут присутствовать подобные обтекания.

### Обсуждение полученных результатов

В ходе исследования методом решёток Больцмана были проанализированы характеристики вихревой дорожки, образующейся вследствие обтекания цилиндрического препятствия в плоском щелевом канале. Особое внимание было уделено демонстрации возможностей и преимуществ LBM при моделировании подобных задач.

Преимущества метода решёток Больцмана:

- концептуальная простота. LBM основан на дискретизации кинетического уравнения Больцмана, что упрощает понимание и реализацию модели;

- гибкость в применении. Метод легко адаптируется к сложным геометрическим формам и различным условиям на границах, что делает его универсальным инструментом для моделирования течений с разнообразными характеристиками;

- параллельная вычислительная эффективность. LBM хорошо подходит для параллельных вычислений, позволяя эффективно использовать современные многопроцессорные системы и графические процессоры (GPU);

- простота учета микроскопических эффектов. Метод позволяет легко включать в модель молекулярные взаимодействия и другие микроскопические явления, что расширяет возможности его применения в различных областях науки и техники.

Можно отметить, что рассмотренное математическое и численное моделирование методом LBM можно применить при разработке современных медицинских изделий. Это связано с большим количеством факторов влияющих на протекание гидродинамических процессов в современном медицинском оборудовании при проектировании аппаратов искусственного дыхания и кровообращения, оценки влияния установки стентов на повторное тромбообразование и тромбоэктомию.

## Литература

1. A.A. Mohamad, Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes. Springer, 2011, 178p.

2. M.C. Sukop, D.T. Jr. Thorne, *Lattice Boltzmann Modeling: An Introduction for Geoscientists and Engineers*. Springer, 2006, 172p.
3. T. Krüger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, E.M. Viggen, *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*. Springer, 2017, 694p.
4. О.В. Ильин, Компьютерные исследования и моделирование, **12**, 4, 865–882, (2020). DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-865-882.
5. S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, 2001, 308p. 9.
6. J. Latt, *Hydrodynamic Limit of Lattice Boltzmann Equations*. PhD thesis, University of Geneva, 2007, 102p.
7. W. Zhao, W.-A. Yong, *Journal of Computational Physics*, 329, 1-15, (2017). arXiv: 1712.08288.
8. K. Mattila, J. Hyvaluoma, J. Timonen, T. Rossi, *Computers and Mathematics with Applications*, **55**, 7, 1514–1524, (2008). DOI: 10.1016/j.camwa.2007.08.029.
9. М.М. Гаспарян, А.С. Самонов, Компьютерные исследования и моделирование, **11**, 3, 427–447, (2019). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-427-447.
10. Д. Алинежад, Д.А. Эсфахани, Теплофизика и аэромеханика, **20**, 5, 623–631, (2013). DOI: 10.1134/s0869864313050084.
11. Н.А. Брыков, К.Н. Волков, В.Н. Емельянов, С.С. Толстогузов, Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, **24**, 2, 293–305, (2024). DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-293-305.
12. Г.В. Кривовичев, Компьютерные исследования и моделирование, **6**, 3, 365–381, (2014). DOI: 10.20537/2076-7633-2014-6-3-365-381.
13. Ф.Г. Черемисин, Журнал вычислительной математики и математической физики, **25**, 12, 1840–1855, (1985). DOI: 10.1016/0041-5553(85)90026-6.
14. И.В. Володин, Пермский государственный университет, Физика для Перского края, 10, (2017), С. 96-99.
15. Г.С. Чащин, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 100, (2021).
2. M.C. Sukop, D.T. Jr. Thorne, *Lattice Boltzmann Modeling: An Introduction for Geoscientists and Engineers*. Springer, 2006, 172p.
3. T. Krüger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, E.M. Viggen, *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*. Springer, 2017, 694p.
4. O.V. Ilyin, *Computer Research and Modeling*, **12**, 4, 865–882, (2020). DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-865-882.
5. S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, 2001, 308p.
6. J. Latt, *Hydrodynamic Limit of Lattice Boltzmann Equations*. PhD thesis, University of Geneva, 2007, 102p.
7. W. Zhao, W.-A. Yong, *Journal of Computational Physics*, 329, 1-15, (2017). arXiv: 1712.08288.
8. K. Mattila, J. Hyvaluoma, J. Timonen, T. Rossi, *Computers and Mathematics with Applications*, **55**, 7, 1514–1524, (2008). DOI: 10.1016/j.camwa.2007.08.029.
9. M.M. Gasparyan, A.S. Samonov, *Computer Research and Modeling*, **11**, 3, 427–447, (2019). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-427-447.
10. D. Alinejad, D.A. Esfahani, *Thermophysics and Aeromechanics*, **20**, 5, 623–631, (2013). DOI: 10.1134/s0869864313050084.
11. N.A. Brykov, K.N. Volkov, V.N. Emelyanov, S.S. Tolstoguzov, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, **24**, 2, 293–305, (2024). DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-293-305.
12. G.V. Krivovichev, *Computer Research and Modeling*, **6**, 3, 365–381, (2014). DOI: 10.20537/2076-7633-2014-6-3-365-381.
13. F.G. Cheremisin, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **25**, 12, 1840–1855, (1985). DOI: 10.1016/0041-5553(85)90026-6.
14. I.V. Volodin, Perm State University, Physics for Perm region, 10, (2017), P. 96-99.
15. G.S. Chashchin, *Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics*, 100, (2021).

## References

1. A.A. Mohamad, *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*. Springer, 2011, 178p.

© И. С. Миргородский – аспирант, каф. Интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами, Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ), Казань, Россия, viperigor12@gmail.com; Ф. Х. Тазюков – д.т.н., с.н.с., проф. каф. Основ конструирования и прикладной механики, КНИТУ, Tazyukov@mail.ru; Ф. Р. Карибуллина – к.т.н., доцент каф., каф. Низкотемпературной и компрессорной техники и технологий, КНИТУ, faridafamily@mail.ru; И. Н. Мусин – к.т.н., доцент, зав.кафедрой, каф. Медицинской инженерии, КНИТУ, ildarmusin@mail.ru.

© I. S. Mirgorodskiy – PhD-student of the Department of Intelligent Systems and Information Resource Management, Kazan National Research Technological University (KNRTU), Kazan, Russia, viperigor12@gmail.com; F. Kh. Tazyukov – Doctor of Sciences (Technical Sci.), Senior Researcher, Professor of the Department of Design Fundamentals and Applied Mechanics, KNRTU, Tazyukov@mail.ru; F. R. Karibullina – PhD (Technical Sci.), Associate Professor of the Department of Low-Temperature and Compressor Engineering and Technology, KNRTU, faridafamily@mail.ru; I. N. Musin – PhD (Technical Sci.), Associate Professor, Head of the Department of Medical Engineering, KNRTU, ildarmusin@mail.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию – 05.07.25.

Дата принятия рукописи в печать – 15.10.25.