УДК 519.24 DOI 10.55421/3034-4689_2025_28_11_136

С. И. Носков, Т. К. Кириллова

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КЛАСТЕРНОЙ СМЕШАННОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Ключевые слова: кластерная смешанная кусочно-линейная регрессия, функция потерь, метод наименьших модулей, линейно-булево программирование, производство нефтепродуктов.

В работе дан краткий обзор публикаций по применению при моделировании сложных объектов нелинейных кластерных регрессий. В частности, рассмотрены: алгоритм кластерной нелинейной регрессии центра и диапазона для интервально значимых данных; методы нелинейного регрессионного анализа, разработанные для анализа кластеризованных данных; метод нелинейной подпространственной кластеризации для группировки изображений; методы моделирования и оценки нелинейных условных квантильных функций, когда данные кластеризуются в двухуровневых вложенных планах; подход к кластеризации данных в двухуровневых вложенных планах; новый алгоритм кластеризации на основе интервально-значной устойчивой нечеткой модели; алгоритм кластеризации нечетких моделей с-регрессии; кластеризация модели смеси Гаусса, основанная на генетической версии алгоритма максимизации ожидания и критерия минимальной длины описания. Показано, что если в качестве функции потерь при вычислении оценок параметров кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии используется сумма модулей отклонений расчетных значений зависимой переменной от фактических, эта задача может быть сведена к задаче линейно-булева программирования. Построена кластерная смешанная кусочно-линейная регрессионная модель производства нефтепродуктов в Российской Федерации. В качестве независимых факторов задействованы объемы добычи нефти и конденсата. Модель обладает высокими аппроксимационными характеристиками, на что указывают используемые критерии адекватности – сумма модулей ошибок и средняя относительная ошибка. Анализ модели показывает, что индексные множества, на которых определены частные линейные модели, обладают разной мощностью. Кроме того, вторая частная регрессия не содержит компоненты, соответствующие функции Леонтьева, поскольку соответствующие параметры оказались равными нулю.

S. I. Noskov, T. K. Kirillova

ESTIMATION OF PARAMETERS OF CLUSTER MIXED LOOP-LINEAR REGRESSION

Keywords: clustered mixed piecewise linear regression, loss function, least squares method, linear-boolean programming, and petroleum production.

The paper provides a brief overview of publications on the use of nonlinear cluster regressions in modeling complex objects. In particular, the following are considered: an algorithm for cluster nonlinear regression of center and range for interval-significant data; methods of nonlinear regression analysis developed for analyzing clustered data; a method of nonlinear subspace clustering for grouping images; methods for modeling and evaluating nonlinear conditional quantile functions when data is clustered in two-level nested plans; an approach to clustering data in two-level nested plans; a new clustering algorithm based on an interval-valued stable fuzzy model; a clustering algorithm for fuzzy c-regression models; clustering of the Gaussian mixture model based on a genetic version of the expectation maximization algorithm and the minimum description length criterion. It is shown that if the sum of the modulus of deviations of the calculated values of the dependent variable from the actual values is used as a loss function when calculating estimates of the parameters of a cluster mixed piecewise linear regression, this problem can be reduced to a linear Boolean programming problem. A cluster mixed piecewise linear regression model of oil product production in the Russian Federation is constructed. The volumes of oil and condensate production are involved as independent factors. The model has high approximation characteristics, as indicated by the adequacy criteria used – the sum of error modules and the average relative error. The analysis of the model shows that the index sets on which particular linear models are defined have different capacities. In addition, the second partial regression does not contain components corresponding to the Leontiev function, since the corresponding parameters turned out to be zero.

Введение

Применение методов математического моделирования при исследовании сложных систем может предполагать необходимость разбиения подлежащей обработке и анализу информации на непересекающиеся группы (кластеры) элементов. Для решения этой проблемы часто эффективно применяются методы построения кластерных регрессий. При этом могут быть задействованы как линейные, так и существенно нелинейные модельные конструкции. Так, например, в работе [1] представлен алгоритм кластерной нелинейной регрессии центра и диапазона для интервально значимых данных. Этот способ объединяет алгоритм типа k-средних с методами линейной и нелинейной регрессии центра и диапазона для интервально значимых данных с целью определения как разбиения данных, так и построения соответствующих регрессионных моделей, подобранных для центра и диапазона интервалов одновременно, по одной для каждого кластера. В статье [2] модифицируются методы нелинейного регрессионного анализа, разработанные для анализа кластеризованных данных. Новизна подхода заключается в двойном включении случайных кластерных эффектов и структурной ошибки в измерение объясняющих переменных. В [3] представлен метод нелинейной подпространственной кластеризации для группировки изображений. В отличие от большинства существующих методов подпространственной кластеризации, которые используют только линейные отношения образцов для изучения аффинной матрицы, данный метод допускает многокластерную нелинейную структуру образцов с помощью нелинейной нейронной сети. И хотя методы кластеризации на основе ядра также могут решать нелинейную проблему образцов, этот тип методов «страдает» от проблемы масштабируемости. В публикации [4] разработаны методы моделирования и оценки нелинейных условных квантильных функций, когда данные кластеризуются в двухуровневых вложенных планах. Предлагаемый алгоритм оценки представляет собой смесь алгоритма сглаживания для квантильной регрессии и приближения Лапласа второго порядка для нелинейных смешанных моделей. Исследование [5] посвящено разработке метода кластеризации адаптивной гауссовой регрессии, нацеленный на прогнозирование в реальном времени нелинейных структурных реакций в механике твердого тела. Это метод машинного обучения на основе данных, отличающийся малым размером выборки, высокой точностью и эффективностью, использующий нелинейные структурные шаблоны отклика. Ожидается, что метод станет мощным инструментом для прогнозирования в реальном времени нелинейных механических проблем твердого тела и прольет свет на сложную нелинейную модель структурного отклика.

В статье [6] сравниваются прогнозные характеристики модели Self-Exciting Threshold Autoregressive (SETAR) и модели нечеткой кластерной регрессии. Динамические ряды при этом представляют собой высокочастотные финансовые данные в виде семи основных цен акций на фондовых рынках США, фондовых индексов семи мировых центров торговли акциями, ежедневных цен на золото и сырую нефть и ежедневного обменного курса между канадским долларом и долларом США. Выявлено, что модели не слишком отличаются друг от друга с точки зрения соответствия внутри выборки, но с точки зрения прогнозных характеристик нечеткая модель дает лучшие и более стабильные прогнозы. В работе [7] для преодоления проблем кластеризации волатильности адаптивная нейро-нечеткая система вывода объединяется с нелинейной обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичностью, которая настраивается с помощью адаптивной регрессии опорных векторов для решения проблемы изменяющейся во времени условной дисперсии в остаточных ошибках. В [8] представлен новый алгоритм кластеризации на основе интервально-значной устойчивой нечеткой модели c-регрессии типа 2 для идентификации нелинейных систем с учетом наличия шума и выбросов в связанном наборе данных. Приводится структура предлагаемого алгоритма кластеризации и выводится правило обновления его параметров. В публикации [9] представлен новый метод для алгоритма кластеризации нечетких моделей c-регрессии. Алгоритм построения нечетких моделей c-регрессии чувствителен к инициализации, что может привести к сходимости целевой функции к локальному минимуму. Чтобы преодолеть эту проблему, для достижения глобального оптимума и окончательной настройки параметров полученной нечеткой модели применяется оптимизация роя частиц. В статье [10] разрабатывается кластеризация модели смеси Гаусса, основанная на генетической версии алгоритма максимизации ожидания и критерия минимальной длины описания. В работе [11] рассматривается задача идентификации класса кусочно-аффинных систем, называемых кусочно-аффинной авторегрессионной экзогенной моделью. При предположении, что число подмоделей известно априори, входные и выходные данные собираются в несколько кластеров с использованием статистического алгоритма кластеризации.

Следует также отметить следующие работы: [12] (нелинейная модель кластеризации данных с использованием смеси процессов Дирихле), [13] (применение алгоритма кластеризации Густафсона-Кесселя для сокращения данных), [14] (использование взаимной информационно-спектральной кластеризации для мониторинга производственного процесса), [15] (бионический оптимизированный алгоритм кластеризации данных на основе платформы облачных вычислений), [16] (алгоритм кластеризации для идентификации нечеткой модели Такаги-Сугено), [17] (статистическое обучение нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с использованием вариационной кластеризации).

Цель настоящей работы состоит в разработке алгоритма идентификации параметров кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии, основанного на решении задачи линейно-булева программирования (ЛБП).

Сведение задачи идентификации параметров кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии к задаче линейно-булева программирования

В работе [18] введена кластерная смешанная кусочно-линейная регрессия следующего вида:

$$y_k = \alpha_0^j + min\{\alpha_1^j x_{k1}, \alpha_2^j x_{k2}, \ldots, \alpha_m^j x_{km}\} + max\{\beta_1^j x_{k1}, \beta_2^j x_{k2}, \ldots, \beta_m^j x_{km}\} + \varepsilon_k^j, \quad j = \overline{1,r},\ k \in P^j. \tag{1}$$

Здесь r – заранее заданное число кластеров, $\alpha_i^j, j = \overline{1,r},\ i = \overline{0,m},\ \beta_i^j,\ i = \overline{1,m}$ – подлежащие идентификации оценки параметров, индексные множества $P^j \subset \{1,2,\ldots,n\},\ j = \overline{1,r}$ фиксируют номера входящих в соответствующие кластеры наблюдений, y – зависимая, а $x_i,\ i=\overline{1,m}$ – независимые переменные, k – номер наблюдения, n – их количество. Множества $P^j,\ j = \overline{1,r}$ также подлежат определению и не должны пересекаться, а их объединение – совпадать со всем множеством номеров наблюдений выборки:

$$\bigcup_{j=1}^r P^j = \{1,2,\ldots,n\},\ P^i \cap P^j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Кластерная регрессия (1) является обобщением кусочно-линейной функции Леонтьева [19]

$$y_k = min\{\alpha_1 x_{k1}, \alpha_2 x_{k2}, \ldots, \alpha_m x_{km}\} + \varepsilon_k, k=\overline{1,n} \tag{2}$$

и кусочно-линейной функции риска [20]

$$y_k = max\{\beta_1 x_{k1}, \beta_2 x_{k2}, \dots, \beta_m x_{km}\} + \varepsilon_k, k=\overline{1,n}. \quad (3)$$

В [19, 20] показано, что задачи оценивания неизвестных параметров кусочно-линейных регрессий (2), (3) могут быть сведена к задачам линейно-булева программирования.

В работе [21] приведен алгоритмический способ сведения задачи оценивания параметров γ_i^j, $j = \overline{1,r}$, $i = \overline{0,m}$ кластерной линейной регрессии

$$y_k=\gamma_0^j + \sum_{i=1}^m \gamma_i^j x_{ki} + \varepsilon_k^j, j = \overline{1,r}, k \in P^j \quad (4)$$

к задаче ЛБП следующим образом. Введем в рассмотрение матрицу оценок параметров $A=||\gamma_i^j||$, $j = \overline{1,r}$, $i = \overline{0,m}$ регрессии (4) и матрицу индикаторных переменных $\Xi=||\sigma_{kj}||$, $k=\overline{1,n}$, $j = \overline{1,r}$:

$$\sigma_{kj}= \begin{cases} 1, & k \in P^j \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, если в качестве расстояния между расчетными и заданными в выборке значениями зависимой переменной использовано манхэттенское расстояние, оценка параметров и формирование составов индексных множеств P^j, $j = \overline{1,r}$ кластерной линейной регрессии (4) производится путем решения следующей оптимизационной задачи:

$$G(A,\Xi) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r \sigma_{kj} |\varepsilon_k^j|. \quad (5)$$

В [21] показано, что задача (5) эквивалентна следующей задаче ЛБП:

$$\gamma_0^j + \sum_{i=1}^m \gamma_i^j x_{ki} - M\sigma_{kj} + u_k \geq y_k - M, \quad j = \overline{1,r},\ k = \overline{1,n}, \quad (6)$$

$$\gamma_0^j + \sum_{i=1}^m \gamma_i^j x_{ki} + M\sigma_{kj} - u_k \leq y_k + M, \quad j = \overline{1,r}, k = \overline{1,n}, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^r \sigma_{kj}=1,\ k=\overline{1,n}, \quad (8)$$

$$\sigma_{kj} \in \{0,1\}, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,n}, \quad (9)$$

$$u_k \geq 0, k = \overline{1,n}, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n u_k \to min. \quad (11)$$

Здесь M – заранее заданное большое положительное число.

Оказывается, можно, используя вычислительные приемы, применявшиеся в работах [19-21], свести задачу (5) для кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии (1) также к задаче ЛБП.

Введем следующие обозначения.

$$h_{kj} = \min_{\underline{i=1,m}}\{a_i^j x_{ki}\}, \quad k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, i = \overline{1,m},$$

$$p_{kij} = \begin{cases} 1, & a_i^j x_{ki} = \min_{\underline{t=1,m}}\{a_t^j x_{kt}\} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$v_{kj} = \max_{\underline{i=1,m}}\{\beta_i^j x_{ki}\}, \quad k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, i = \overline{1,m},$$

$$s_{kij} = \begin{cases} 1, & a_i^j x_{ki} = \max_{\underline{t=1,m}}\{\beta_t^j x_{kt}\} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда задача (5) по вычислению оценок параметров кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии (1) (по аналогии с задачей (6) – (11) для модели (4)) сводится к следующей задаче ЛБП:

$$h_{kj} \leq a_i^j x_{ki},\ k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, i = \overline{1,m}, \quad (12)$$

$$a_i^j x_{ki} - h_{kj} \leq (1 - p_{kij})M_i, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, i = \overline{1,m}, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^m p_{kij}=1,\ k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, \quad (14)$$

$$v_{kj} \geq \beta_i^j x_{ki},\ k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, i = \overline{1,m}, \quad (15)$$

$$\beta_i^j x_{ki} - v_{kj} \geq (s_{kij} - 1)M_i, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, i = \overline{1,m}, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^m s_{kij}=1,\ k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, \quad (17)$$

$$\alpha_0^j + h_{kj} + v_{kj} - \bar{M}\sigma_{kj} + u_k \geq y_k - \bar{M}, j = \overline{1,r},\ k = \overline{1,n}, \quad (18)$$

$$\alpha_0^j + h_{kj} + v_{kj} + \bar{M}\sigma_{kj} - u_k \leq y_k + \bar{M}, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,n}, \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^r \sigma_{kj}=1, k=\overline{1,n}, \quad (20)$$

$$p_{kij} \in \{0,1\}, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, i = \overline{1,m}, \quad (21)$$

$$s_{kij} \in \{0,1\}, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}, i = \overline{1,m}, \quad (22)$$

$$\sigma_{kj} \in \{0,1\}, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,n}, \quad (23)$$

$$u_k \geq 0, k = \overline{1,n}, \quad (24)$$

$$h_{kj} \geq 0, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,n}, \quad (25)$$

$$v_{kj} \geq 0, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,n}, \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n u_k + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m \delta_i (a_i^j - \beta_i^j) \to min. \quad (27)$$

Здесь δ_{ij}, $j = \overline{1,r}$, $i = \overline{1,m}$ – наперед заданные малые, а $\bar{M}$, M_i, $i = \overline{1,m}$ – большие положительные числа. Второе слагаемое в целевой функции (27) обеспечивает единственность решения задачи (12) – (27).

Применим описанный алгоритмический способ оценивания параметров кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии для моделирования производства нефтепродуктов в Российской Федерации. При этом используем статистическую информацию за 2015 -2022 гг. по следующим показателям [21]: y – производство нефтепродуктов, млн. т.; x_1 – объем *добычи* нефти, млн. т.; x_2 – объем добычи конденсата, млн. т. Таким образом, $m = 2$, $n = 8$.

В результате решения задачи ЛБП (12) – (27) получим следующую кластерную смешанную кусочно-линейную регрессию:

$$y_k = -373 + min\{0.557x_{k1}, 10.5x_{k2}\} + max\{0.5784x_{k1}, 8.46x_{k2}\}, \quad (28)$$

$$k \in P^1=\{1,6\},$$

$$y_k = 141 + max\{0.073x_{k1}, 1.1x_{k2}\}, \quad (29)$$

$$k \in P^2=\{2,3,4,5,7,8\},$$

$$G = 10.5, \mathrm{E} = 0.73\%.$$

Здесь Е – средняя процентная ошибка:

$$\mathrm{E} = 100\%\, G / \sum_{i=1}^{n} y_k.$$

Обращают на себя внимание следующие обстоятельства.

1. Вторая частная регрессия (29) не содержит компоненты, соответствующие функции Леонтьева, поскольку параметры a_1^2 и a_2^2 оказались равны нулю.
2. Индексное множество P^2 содержит шесть номеров наблюдений, в то время как P^1 – лишь два.
3. Кластерная смешанная кусочно-линейная регрессия (28), (29) обладает, если судить по значениям критериев адекватности G и Е, весьма высокой точностью.

Заключение

В работе представлен алгоритмический способ оценивания неизвестных параметров кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии, которая является обобщением кусочно-линейных функций Леонтьева и риска. Заметим, что метод идентификации параметров обычной смешанной кусочно-линейной регрессии описан в работе [22]. Показано, что если в качестве функции потерь при вычислении оценок параметров регрессии (1) применяется соответствующая методу наименьших модулей сумма абсолютных значений ошибок аппроксимации, эта задача может быть сведена к задаче линейно-булева программирования. Построение кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии позволяет, кроме всего прочего, разделить исходную выборку данных на две непересекающиеся подвыборки, каждой из которых соответствует своя частная регрессия указанного типа.

Предложенный способ построения кластерной смешанной кусочно-линейной регрессии использован при разработке модели производства нефтепродуктов в Российской Федерации. Она обладает высокой точностью и может быть применена для решения аналитических и прогнозных задач.

Литература

1. F. E. de A. L Carvalho Neto, K. C. F Silva. *Information Sciences*, **5**, 1, 357–385 (2021). DOI:10.1016/j.ins.2020.10.054.
2. J. V. Zidek, N. D. Le, H. Wong, R. T. *Canadian Journal of Statistics*, **4**, 537–548 (2008).
3. W. Zhu, J. Lu, J. Zhou. *Pattern Recognition Letters*, **107**, 4, 131–136 (2018). DOI: 10.1016/j.patrec.2017.08.023.
4. M. Geraci. *Computational Statistics and Data Analysis*, **136,** 30–46 (2019). DOI: 10.1016/j.csda.2018.12.005.
5. M. J. Li, Y. Lian, Z. Cheng, L.Li, Z. Wang, R. Gao, D. A. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* **19**, Article 107508 (2025). P. 117-129.
6. H. Feng Forecasting. *Applied Economics Letters*, **17**, 1703–1707 (2011). DOI: 10.1080/13504851.2011.554369.
7. B. R. Chang. *Fuzzy Sets and Systems*, **13,** 1832–1850 (2006)
8. M. Soltani, A. J. Telmoudi, L. Chaouech, M. Ali, A. *Soft Computing*, **23,** 6125–6134 (2019).
9. M. Soltani, A. Chaari. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **6**, 23, 881–891 (2015).
10. X. Huang, H. Xu, J. Chu. *Mathematical Problems in Engineering*, **2022**, 995-998 (2022). DOI: 10.1155/2022/9958210.
11. H. Nakada, K. Takaba, T. Katayama *Automatica*, **5**, 41, 905–913 (2005).
12. B. Shahbaba, R.Neal *Journal of Machine Learning Research*, **10**, 1829–1850 (2009).
13. X. Liu, A. Ouyang, Z.Yun. *Mathematical Problems in Engineering*, **14**, 738-765 (2018). DOI: 10.1155/2018/7387650.
14. Q. Jiang, X. Yan Nonlinear. *Journal of Process Control*, **32**, 38–50 (2015). DOI: 10.1016/j.jprocont.2015.04.014
15. Y. Zhang. *Nonlinear Engineering*, **1**, 12, 202-207 (2023). DOI: 10.1515/nleng-2022-0239.
16. Bouzbida M., Hassine L., Chaari A. *Mathematical Problems in Engineering*, **2017**, 242-251 (2017). DOI: 10.1155/2017/2427309.
17. V. Boyko, S. Krumscheid, N. *Multiscale Modeling and Simulation*, **4**, 20, 1489–1519 (2022). DOI: 10.1137/21M1403989.
18. С.И. Носков *Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами*, **4**, 24, 41-44 (2024).
19. С.И. Носков, Р.В. Лоншаков *Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем*, **6**, 63-64 (2008).
20. С.И. Носков *Транспортная инфраструктура Сибирского региона*, **1**, 417-421 (2017).
21. С.И. Носков, С.В. Беляев *Вестник Технологического университета*, **2**, 28, 88-91 (2025).
22. С.И. Носков, А. А. Хоняков *Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами*, **3**, 4, 47-55 (2019). DOI: 10.26731/2658-3704.2019.3(4).47-55.

References

1. F. E. de A. L Carvalho Neto, K. C. F Silva. *Information Sciences*, 5, 1, 357–385 (2021). DOI:10.1016/j.ins.2020.10.054 .
2. J. V. Zidek, N. D. Le, H. Wong, R. T. *Canadian Journal of Statistics*, 4, 537–548 (2008).
3. W. Zhu, J. Lu, J. Zhou. *Pattern Recognition Letters*, 107, 4, 131–136 (2018). DOI: 10.1016/j.patrec.2017.08.023.
4. M. Geraci. *Computational Statistics and Data Analysis*, 136, 30–46 (2019). DOI: 10.1016/j.csda.2018.12.005.
5. M. J. Li, Y. Lian, Z. Cheng, L.Li, Z. Wang, R. Gao, D. A. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19, Article 107508 (2025). P. 117-129.
6. H. Feng Forecasting. *Applied Economics Letters*, 17, 1703–1707 (2011). DOI: 10.1080/13504851.2011.554369.
7. B. R. Chang. *Fuzzy Sets and Systems*, 13, 1832–1850 (2006) .

8. M. Soltani, A. J. Telmoudi, L. Chaouech, M. Ali, A. *Soft Computing*, 23, 6125–6134 (2019).
9. M. Soltani, A. Chaari. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 6, 23, 881–891 (2015).
10. X. Huang, H. Xu, J. Chu. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022, 995-998 (2022). DOI: 10.1155/2022/9958210.
11. H. Nakada, K. Takaba, T. Katayama *Automatica*, 5, 41, 905–913 (2005).
12. B. Shahbaba, R.Neal *Journal of Machine Learning Research*, 10, 1829–1850 (2009).
13. X. Liu, A. Ouyang, Z.Yun. *Mathematical Problems in Engineering*, 14, 738-765 (2018). DOI: 10.1155/2018/7387650 .
14. Q. Jiang, X. Yan Nonlinear. *Journal of Process Control*, 32, 38–50 (2015). DOI: 10.1016/j.jprocont.2015.04.014.
15. Y. Zhang. *Nonlinear Engineering*, 1, 12, 202-207 (2023). DOI: 10.1515/nleng-2022-0239.
16. Bouzbida M., Hassine L., Chaari A. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 242-251 (2017). DOI: 10.1155/2017/2427309.
17. V. Boyko, S. Krumscheid, N. *Multiscale Modeling and Simulation*, 4, 20, 1489–1519 (2022). DOI: 10.1137/21M1403989.
18. S.I. Noskov *Informatsionnie tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnimi sistemami*, 4, 24, 41-44 (2024).
19. S.I. Noskov, R.V. *Lonshakov Informatsionnie tekhnologii i problemi matematicheskogo modelirovaniya slozhnikh sistem*, 6, 63-64 (2008).
20. S.I. Noskov *Transportnaya infrastruktura Sibirskogo regiona*, 1, 417-421 (2017).
21. S.I. Noskov, S.V. Belyaev, *Herald of Technological University*, 2, 28, 88-91 (2025).
22. S.I. Noskov, A. A. *Khonyakov Informatsionnie tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnimi sistemami*, 3, 4, 47-55 (2019). DOI: 10.26731/2658-3704.2019.3(4).47-55.

© **С. И. Носков** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» (ИСЗИ), Иркутский государственный университет путей сообщения (ИГУПС), Иркутск, Россия, sergey.noskov.57@mail.ru; **Т. К. Кириллова** – канд. экон. наук, доцент, заведующий кафедрой ИСЗИ, ИГУПС, kirillova_tk@irgups.ru.

© **S. I. Noskov** – Doctor of Sciences (Technical Sci.), Prof., Professor of the Department of Information Systems and Information Security (ISIS), Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia, sergey.noskov.57@mail.ru; **T. K. Kirillova** – PhD (Economical Sci.), Associate Professor, Head of the ISIS department, ISTU, kirillova_tk@irgups.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию – 22.08.25.
Дата принятия рукописи в печать – 01.10.25.