

Ф. Х. Тазюков, Ф. Р. Карибуллина

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

*Ключевые слова:* численное моделирование, плоское течение, распределение главных напряжений.

Данная статья посвящена изучению течения вязкой ньютоновской жидкости, в прямоугольной полости с движущимися границами в плоской постановке. Течение жидкости вызывается движением трех движущихся стенок полости. Четвертая стенка остается неподвижной. Данное постановка задачи моделирует процесс смешения в канале планетарного экструдера. Подобное упрощение тем не менее сохраняет качественную картину течения жидкости и позволяет объяснить эффекты, связанные с ростом напряжений в угловых точках полости. Предполагается, что возможные твердые включения, входящие в состав перемешиваемых жидкостей, являются достаточно малыми и не влияют на картину течения жидкости в этой полости. Также предполагается, что жидкость уже является однородной средой и не обладает неньютоновскими свойствами. Задача решается методом контрольных объемов (МКО), характеризующийся свойством консервативности, выполнением интегральных балансовых соотношений. Целью данной работы является исследование потоков жидкости в исследуемой полости, а также в окрестности угловых зон. Для достижения поставленной цели были исследованы линии тока в исследуемой области, а также распределения напряжений в различных сечениях полости. Полученные результаты моделирования позволяют получить распределения первой разности главных напряжений (PSD) в разных сечениях полости, что позволяет оценить влияние застойных зон в окрестности угловых точек на общую картину течения. В работе представлены картины линий тока, позволяющие проанализировать структуру течения. Кроме того, представлены изолинии разности главных напряжений в, области течения. Обсуждается влияние изменения напряжений в окрестности угловых точек на структуру течения жидкости. Показано, что застойные зоны характеризуются аномальным ростом напряжений, что связано в том числе и с сингулярностью поведения напряжений в застойных зонах.

F. Kh. Tazyukov, F. R. Karibullina

## MATHEMATICAL MODELING OF FLUID FLOW IN A RECTANGULAR CAVITY WITH MOVING BOUNDARIES

*Keywords:* numerical modeling, plane flow, distribution of principal stresses.

This article is devoted to the study of viscous Newtonian fluid in a rectangular cavity with moving boundaries in a plane setting. The treatment of the fluid causes the movement of three moving walls of the oral cavity. The fourth wall remains stationary. This formulation of the problem models the mixing process in the channel of a planetary extruder. Such simplification nevertheless preserves a qualitative picture of the liquid flow and allows us to explain the effects associated with the growth of stresses at the corner points of the cavity. It is assumed that possible solid inclusions included in the mixed liquids are small enough and do not affect the flow pattern of the liquid in this cavity. It is also assumed that the liquid is already a homogeneous medium and does not have non-Newtonian properties. The problem is solved by the method of control volumes (MCV), characterized by the property of conservatism, the implementation of integral balance relations. The purpose of this work is to study the fluid flows in the cavity under study, as well as in the vicinity of corner zones. To achieve the set goal, the flow lines in the studied area were investigated, as well as the stress distributions in different sections of the cavity. The obtained modeling results allow us to obtain the distributions of the first difference of principal stresses (PSD) in different sections of the cavity, which allows us to evaluate the influence of stagnant zones in the vicinity of corner points on the overall flow pattern. The paper presents flow line patterns that allow the flow structure to be analyzed. In addition, isolines of the difference in principal stresses in the flow region are presented. The influence of stress changes in the vicinity of corner points on the structure of fluid flow is discussed. It is shown that stagnant zones are characterized by an abnormal increase in stresses, which is associated, among other things, with the singularity of stress behavior in stagnant zones.

### Математическая постановка

Рассмотрим течение вязкой ньютоновской жидкости с постоянной плотностью в плоской замкнутой области с подвижными стенками. Течение жидкости индуцируются движением стенок и описывается системой уравнений в частных производных Навье-Стокса [1-5].

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} \right) = \bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \cdot \tilde{\tau}, \quad (2)$$

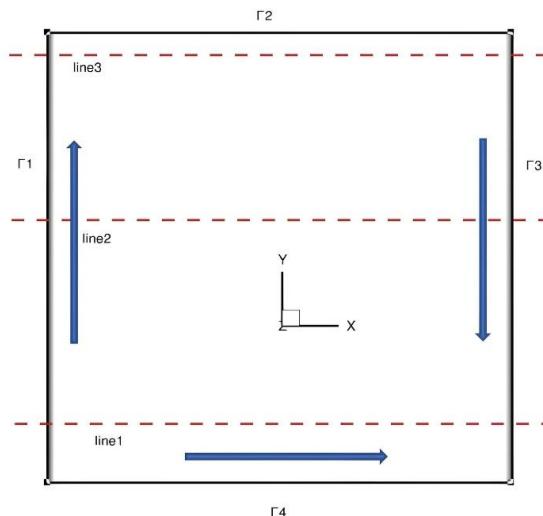
где  $t$  - время;  $\bar{v}$  - вектор скорости;  $\tilde{\tau} = 2\eta \tilde{D}$  - девиатор напряжения;  $\tilde{D}$  - тензор скоростей деформации;  $\eta = 0.1$  Па·с - динамическая вязкость; плотность жидкости  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>;  $p$  - давление, определяемое

с точностью до аддитивной постоянной;  $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$ ; операция  $\bar{\nabla} \cdot \bar{v}$  обозначает скалярное умножение векторов  $\bar{\nabla}$  и  $\bar{v}$ . Принятая вязкость жидкости характеризует ее как достаточно вязкую с вязкостью превышающую вязкость воды.

В настоящей работе область течения жидкости представляется в виде квадратной полости. Схематическое изображение области течения жидкости в квадратной полости представлено на рис. 1, где стрелками указывается направление движения подвижных стенок, а Г1, Г2 Г3, Г4 обозначают границы принятой области течения. На этом рисунке также указаны сечения, обозначенные как line1, line2, line3. По этим сечениям определялись

распределения искомых параметров (давление, напряжения, скорости).

Будем считать, что стени, обозначенные как ( $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$ ) движутся как показано стрелками на рис.1. Течение индуцируется движением подвижных стенок.



**Рис. 1 – Область течения**  
**Fig. 1 – Flow region**

Таким образом, необходимо решить численно систему уравнений (1-2) с учетом начальных и граничных условий. Граничными условиями в этом случае являются условия на компоненты скорости на границах квадратной области течения. На всех границах приняты условия прилипания. В этом случае скорость жидкости вблизи твердых стенок соответствует скорости движения стенок

$$\begin{aligned} U_x|_{\Gamma_1} &= 0 & U_y|_{\Gamma_1} &= V; \\ U_x|_{\Gamma_3} &= 0 & U_y|_{\Gamma_3} &= -V; \\ U_x|_{\Gamma_4} &= U = V & U_y|_{\Gamma_4} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$U_x|_{\Gamma_2} = 0; U_y|_{\Gamma_2} = 0. \quad (4)$$

В начальный момент времени  $t=0$  скорость жидкости принималась равной нулю

$$U_y = 0 \quad U_x = 0. \quad (5)$$

во всей области течения.

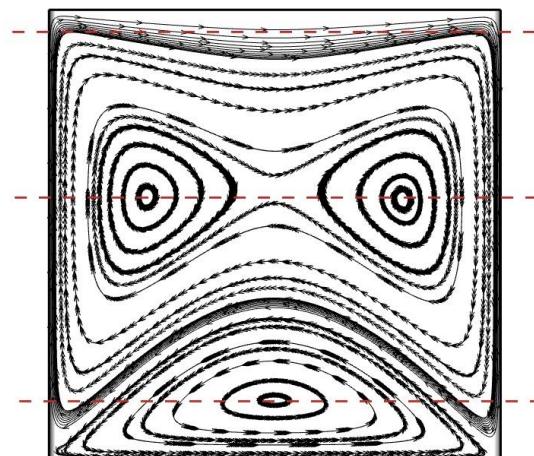
Задача решена методом контрольных объемов на основе открытого пакета OpenFoam [6-8].

Применение метода сглаживания, заложенного в алгоритм метода контрольных объемов (МКО) позволяет исключить нефизическое поведение жидкости в угловых точках [2, 9-11].

Установившееся течение жидкости получено методом установления при  $t \rightarrow \infty$ . Вопросы устойчивости и сходимости освещены в работах [5,6]

### Результаты моделирования

Для получения общего представления о структуре течения жидкости в заданной полости получены линии тока, показанные на рис. 2.



**Рис. 2 – Линии тока**  
**Fig. 2 – Current lines**

Из анализа рис. 2 можно видеть, что исследуемое течение является симметричным относительно центральной вертикальной оси. При этом образуются 3 зоны течения, характеризующиеся замкнутыми линиями тока. А в области течения примыкающей к неподвижной границе  $\Gamma_2$ , как и ожидалось, образуется застойная зона. Можно отметить, что области течения, примыкающие к окрестностям угловых точек, являются областями сингулярного поведения. Эти области течения представляют особый интерес для исследований.

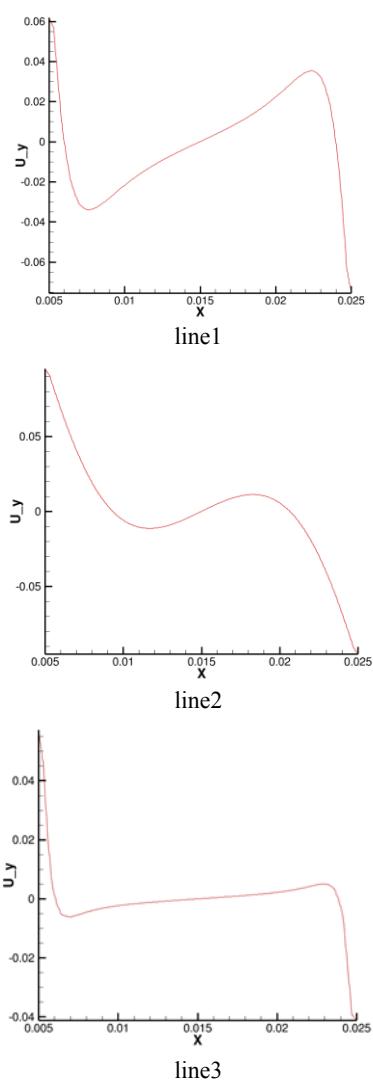
Для более детального изучения особенностей течения в исследуемой каверне, рассмотрено распределение вертикальной компоненты скорости  $U_y$  в сечениях line1, line2 и line3. Полученные распределения представлены на рис. 3.

Из анализа рис. 3 следует, что изменение скорости  $U_y$  во всех трех сечениях качественно схожи. Распределение скорости антисимметрично относительно вертикальной оси. При этом изменение вдоль сечения line1 более значительно. Скорости в центральной области для line2 и line3 практически не меняются и близки к нулю. Можно отметить, что скорость вблизи угловых точек равна нулю.

Из этого можно сделать следующий вывод. Частицы жидкости, находящиеся в области, примыкающей к угловым точкам, возможно подвергаются воздействию значительных напряжений.

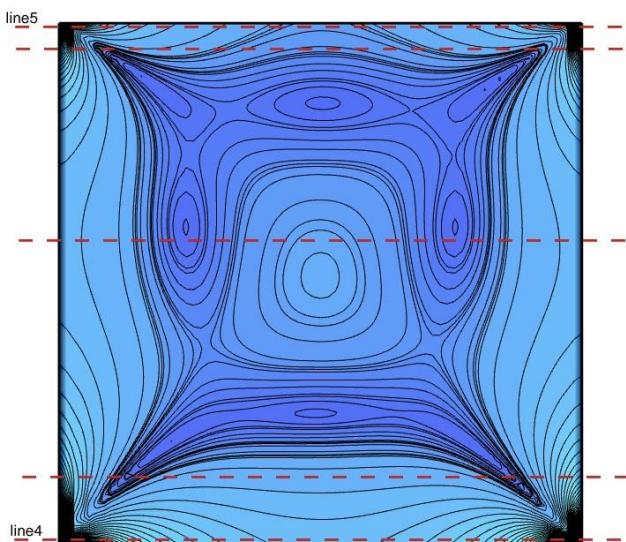
На следующем этапе решения задачи рассмотрены распределения первой разности главных напряжений  $PSD = \sigma_1 - \sigma_2$ , [10, 12-15]. Данная величина представляет особый интерес для исследований, поскольку может указывать на области, в которых могут проявляться такие неильтоновские свойства, как аномалия вязкости и ненулевое время релаксации напряжений.

На рис.4 представлены изолинии первой разности главных напряжений (PSD). На этом рисунке можно видеть, что изолинии первой разности главных напряжений показывают значительный рост вблизи областей сингулярности, расположенных в окрестности угловых точек.



**Рис. 3 – Распределение вертикальной компоненты скорости**

**Fig. 3 – Distribution of the vertical component of velocity**



**Рис. 4 – Изолинии первой разности главных напряжений**

**Fig. 4 – Isolines of the first difference of principal stresses**

При этом можно отметить, что изменение PSD в центральной области течения незначительно.

## Выводы

В результате численного моделирования течения вязкой несжимаемой в замкнутой полости, получены изолинии функции тока и изолинии первой разности главных напряжений. Показаны области циркуляции потока и застойную область, в которой течение практически отсутствует. Также показаны изолинии PSD. Можно видеть места в исследуемой области течения, в которых можно отметить наличие повышенного значения первой разности главных напряжений, что во многих, практически важных случаях, представляет особый интерес и может быть использован при проектировании аппаратов химической технологии.

## Литература

1. H.A. Barnes, P. Townsend, K. Walter, *Rheologica Acta* 10, 517-527, (1971).
2. J.Sun, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **86**, 3, 281-307, (1999).
3. H.Matallah, P. Townsend, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **75**, 2, 139-166, (1998).
4. Л.Г. Лойцинский, *Мехника жидкости и газа*, Дрофа, 2003, 640с.
5. F. Kh. Tazyukov, E. R. Kutuzova, B.A. Snigerev, F.A. Garifullin, **22**, 345-360, (2018).
6. S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York, 1980.
7. R.J. Phillips, R.C. Armstrong, R.A. Brown, A. Graham, J.R. Abbott, *Phys. Fluids*, **4**, 30 - 40 (1992).
8. M. A. Aves, P.J.Oliveira, F.T. Pinho, *Int.JNumer.Methods Fluids* **31**, 47-75, (2003).
9. X. Chen, M. Schäfer, D. Bothe, *Journal of Fluids and Structures*, **54**, 390-421, (2015).
10. Э.Р.Кутузова, Ф.Х. Тазюков, А.Ф. Тазюкова, *Труды Академэнерго*, 3, 34-47 (2018).
11. G.S. Chashchin, *Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics*, 100, (2021).
12. Jeonghun Nama, Bumseok Namgunga, Chwee Teck Lima, Jung-Eun Baec, Hwa Liang Leoa, Kwang Soo Choc, Sangho Kima, *Journal of Chromatography*, 1406, 244–250, (2015).
13. Orestis Pileas Malaspinas, Lattice Boltzmann, *Ecole polytechnique federale de Lausanne*, 4505, (2009).
14. A.J. Smits, *A Physical Introduction to Fluid Mechanics*, 2000, New York: Wiley & Sons.
15. K. Foster and G. A. Parker, *Fluidics: Components and Circuits*. 1970, New York: Wiley Interscience.

## References

1. H.A. Barnes, P. Townsend, K. Walter, *Rheologica Acta* 10, 517-527, (1971).
2. J.Sun, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **86**, 3, 281-307, (1999).
3. H.Matallah, P. Townsend, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **75**, 2, 139-166, (1998).
4. L.G. Loitsyansky, *Mechanics of liquids and gases*, Drofa, 2003, 640 p.
5. F. Kh. Tazyukov, E. R. Kutuzova, B.A. Snigerev, F.A. Garifullin, **22**, 345-360, (2018).
6. S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York, 1980.
7. R.J. Phillips, R.C. Armstrong, R.A. Brown, A. Graham, J.R. Abbott, *Phys. Fluids*, **4**, 30 - 40 (1992).
8. M. A. Aves, P.J.Oliveira, F.T. Pinho, *Int.JNumer.Methods Fluids* **31**, 47-75, (2003).

9. X. Chen, M. Schäfer, D. Bothe, Journal of Fluids and Structures, **54**, 390-421, (2015).
10. E. R. Kutuzova, F. Kh. Tazyukov, A. F. Tazyukova, Proceedings of Akademenergo, 3, 34-47 (2018).
11. G.S. Chashchin, Modeling of Poiseuille Flow. Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, 100, (2021).
12. Jeonghun Nama, Bumseok Namgunga, Chwee Teck Lima, Jung-Eun Baec, Hwa Liang Leo, Kwang Soo Choc, Sangho Kima, Journal of Chromatography, 1406, 244–250, (2015).
13. Orestis Pileas Malaspina, Ecole polytechnique federale de Lausanne, 4505, (2009).
14. A.J. Smits, A Physical Introduction to Fluid Mechanics, 2000, New York: Wiley & Sons.
15. K. Foster and G. A. Parker, Fluidics: Components and Circuits. 1970, New York: Wiley Interscience.

© **Ф. Х. Тазюков** – д.т.н., с.н.с., проф. каф. Основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ), Казань, Россия, Tazyukov@mail.ru; **Ф. Р. Карабуллина** – к.т.н., доцент каф., каф. Низкотемпературной и компрессорной техники и технологии, КНИТУ, faridafamily@mail.ru.

© **F. Kh. Tazyukov** – Doctor of Sciences (Technical Sci.), Senior Researcher, Professor of the Department of Design Fundamentals and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University (KNRTU), Kazan, Russia, Tazyukov@mail.ru; **F. R. Karibullina** – PhD (Technical Sci.), Associate Professor of the Department of Low-Temperature and Compressor Engineering and Technology, KNRTU, faridafamily@mail.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию – 12.09.25.

Дата принятия рукописи в печать – 12.10.25.