

М. К. Сагдатуллин

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭЛАСТОМЕРОВ: ОТ ЭКСПЕРИМЕНТА К ГИПЕРУПРУГИМ КОНСТИТУТИВНЫМ МОДЕЛЯМ

Ключевые слова: гиперупругость, эластомер, плотность энергии, инварианты деформации, метод наименьших квадратов, Муни-Ривлин, Огден, несжимаемость, коэффициент растяжения, анизотропия идентификация параметров.

В данной статье представлен всесторонний анализ методов моделирования механического поведения эластомеров и других несжимаемых полимерных материалов с использованием аппарата гиперупругости. Рассмотрены фундаментальные принципы, лежащие в основе конститутивных моделей конечных деформаций, включая понятие плотности упругой энергии, инвариантов тензора деформации и условие несжимаемости. Подробно изложена физическая и математическая основа ключевых гиперупругих моделей — таких как Нео-Гука, Муни-Ривлина, Огдена и Йео, — с акцентом на вывод выражений для истинного напряжения при одноосном растяжении. Особое внимание уделено объяснению соотношения $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$, вытекающего из изотропии и сохранения объёма, что критически важно для корректного моделирования поведения эластомеров. Описан практический подход к идентификации материальных параметров на основе экспериментальных данных. Приведены рекомендации по проведению механических испытаний (одноосное, двухосное растяжение, сдвиг), а также детально рассмотрен метод наименьших квадратов как основной инструмент параметрической идентификации. Также в работе представлена теория направленной упругой энергии (DSET) — современный подход к моделированию анизотропных гиперупругих материалов. Рассмотрены два варианта модели с аддитивным разложением по направлениям и с выделением объемной части. Показано, что разделение энергии на вклады формы и объема обеспечивает термодинамическую корректность и лучшую применимость для сжимаемых и армированных материалов. DSET позволяет естественно учитывать ортотропию, упрощает идентификацию параметров и эффективно описывает поведение при больших деформациях. Статья охватывает весь путь от теоретических основ до практического применения: от выбора модели до её внедрения в CAE-пакеты, такие как Abaqus и ANSYS. Подчёркнута важность верификации модели на данных, не использовавшихся при подборе параметров, для обеспечения её обобщающей способности. Представленный системный подход может быть применён как к стандартным промышленным эластомерам, так и к новым синтезированным полимерам, для которых отсутствуют справочные данные.

М. К. Sagdatullin

MODELING OF NONLINEAR BEHAVIOR OF ELASTOMERS: FROM EXPERIMENT TO HYPERELASTIC CONSTITUTIVE MODELS

Key words: hyperelasticity, elastomer, energy density, deformation invariants, least squares method, Mooney-Rivlin, Ogden, incompressibility, stretch factor, anisotropy, parameter identification.

This article presents a comprehensive analysis of methods for modeling the mechanical behavior of elastomers and other incompressible polymeric materials using hyperelasticity. The fundamental principles underlying constitutive finite-strain models are reviewed, including the concept of elastic energy density, strain tensor invariants, and the incompressibility condition. The physical and mathematical basis of key hyperelastic models—such as Neo-Hooke, Mooney-Rivlin, Ogden, and Yeo—is detailed, with an emphasis on deriving expressions for the true stress under uniaxial tension. Particular attention is paid to explaining the relationship arising from isotropy and conservation of volume, which is critical for correctly modeling the behavior of elastomers. A practical approach to identifying material parameters based on experimental data is described. Recommendations for conducting mechanical tests (uniaxial, biaxial tension, and shear) are provided, and the least-squares method as a fundamental tool for parametric identification is discussed in detail. The paper also presents directed elastic energy theory (DSET), a modern approach to modeling anisotropic hyperelastic materials. Two model variants are considered: one with additive directional decomposition and one with volumetric separation. It is shown that separating the energy into shape and volume contributions ensures thermodynamic correctness and better applicability to compressible and reinforced materials. DSET naturally accounts for orthotropy, simplifies parameter identification, and effectively describes behavior under large deformations. The paper covers the entire process from theoretical foundations to practical application: from model selection to its implementation in CAE packages such as Abaqus and ANSYS. The importance of model verification on data not used in parameter selection is emphasized to ensure its generalizability. The presented systematic approach can be applied to both standard industrial elastomers and newly synthesized polymers for which reference data is lacking.

Введение

Современные инженерные задачи всё чаще требуют использования материалов, способных выдерживать значительные упругие деформации без потери функциональности. К таким материалам относятся, в первую очередь, эластомеры — полимеры с

выраженной резиноподобной упругостью, такие как натуральный и синтетический каучук, силиконовые и фторированные резины, полиуретаны и гели. Их уникальное поведение при растяжении, сжатии и сдвиге, проявляющееся в способности деформироваться на сотни процентов и возвращаться

в исходное состояние, делает их незаменимыми в автомобильной промышленности, медицинских устройствах, робототехнике, строительстве и аэрокосмической отрасли.

Однако классическая линейная теория упругости, основанная на законе Гука, оказывается неприменимой для описания механического поведения таких материалов. При больших деформациях зависимость между напряжением и деформацией становится «сильно нелинейной», а геометрические изменения настолько значительны, что требуют учёта конечных перемещений и поворотов. В этих условиях на смену линейным моделям приходят гиперупругие модели, основанные на концепции «функции плотности упругой энергии деформации».

Гиперупругость - это термодинамически согласованный подход, в котором напряжённое состояние материала выводится как производная от скалярной функции энергии по мерам деформации. Такой подход позволяет не только точно описывать экспериментальные данные, но и обеспечивает устойчивость численных расчётов в системах конечно-элементного анализа (FEA), таких как Abaqus, ANSYS, COMSOL и другие. Эти модели лежат в основе расчётов уплотнений, амортизаторов, протезов, мягких роботов и других изделий, где важна точная предсказуемость поведения материала при сложных режимах нагружения.

Однако для успешного применения гиперупругих моделей необходимо решить две ключевые задачи: выбор адекватной модели и точная идентификация её параметров. При этом выбор модели зависит от характера деформаций, типа материала, доступных экспериментальных данных и требуемой точности. Параметры же - такие, как C_{10} и C_{01} для модели Муни-Ривлина [4] или μ_p , α_p для модели Огдена [3] - не могут быть взяты из справочников для новых материалов и должны определяться на основе физических испытаний.

Цель данной статьи - представить целостное изложение процесса моделирования нелинейного поведения эластомеров, начиная с фундаментальных принципов механики сплошных сред, включая вывод уравнений напряжений из плотности энергии, и заканчивая практическими рекомендациями по обработке экспериментальных данных и внедрению моделей в инженерные расчёты. Особое внимание уделено физическому смыслу используемых допущений, таких как несжимаемость и изотропия, а также методам подбора параметров с помощью метода наименьших квадратов.

Теоретические основы гиперупругости

Гиперупругие модели представляют собой мощный математический аппарат для описания упругого поведения материалов при конечных деформациях. В основе этих моделей лежит предположение, что существует скалярная функция плотности упругой энергии деформации W , зависящая от тензорных мер деформации, и что напряжения могут быть получены как её производные. Этот подход является обобщением линейной теории упругости на случай больших

перемещений и вращений, что особенно важно для эластомеров, способных растягиваться в несколько раз.

Ключевым объектом в теории гиперупругости является тензор градиента деформации F , который связывает бесконечно малые векторы в недеформированной и деформированной конфигурациях $dx = F \cdot dX$. Из F строится правый тензор Коши-Грина $C = F^T F$, который является симметричным и положительно определённым. Для изотропных материалов функция плотности энергии W зависит не от самого тензора C , а от его инвариантов - скалярных величин, не зависящих от выбора системы координат.

Наиболее часто используются три инварианта:

$$I_1 = \text{tr}(C) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr} C)^2 - \text{tr}(C^2) \right] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \quad (1)$$

$$I_3 = \det(C) = \det(F)^2 = J^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - главные коэффициенты растяжения (principal stretch ratios), а $J = \det(F)$ - мера изменения объёма. Эти инварианты позволяют записывать конститутивные уравнения в универсальной форме, пригодной для любых видов деформации.

Особое значение в механике эластомеров имеет условие несжимаемости, согласно которому объём материала при деформации сохраняется: $J = 1$. Это допущение справедливо для большинства резин и силиконов, так как их модуль объёмной упругости на порядки выше модуля сдвига. Условие $J = 1$ эквивалентно соотношению:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (2)$$

Это соотношение играет ключевую роль при анализе одноосного растяжения. Представим, что образец растягивается вдоль оси 1, так что $\lambda_1 = \lambda > 1$. Если материал изотропен, то в поперечных направлениях деформации будут одинаковыми: $\lambda_2 = \lambda_3$. Подставляя в условие несжимаемости, получаем: $\lambda \cdot \lambda_2^2 = 1$, откуда $\lambda_2 = \lambda^{-1/2}$.

Таким образом, поперечные растяжения определяются однозначно через продольные. Это позволяет выразить инварианты I_1 и I_2 через одну переменную λ :

$$I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}, \quad I_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda. \quad (3)$$

Для сравнения можно рассмотреть другие типы деформаций. Например, растяжение полоски (плоское растяжение, planar tension), зажатой по краям (не даёт сжиматься в одном поперечном направлении): $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1$ (ограничено), тогда $\lambda_3 = 1/(\lambda \cdot 1) = \lambda^{-1}$. При растяжении в двух направлениях (двухосное растяжение, например пленка) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, тогда $\lambda_3 = 1/(\lambda \cdot \lambda) = \lambda^{-2}$.

Для сжимаемых материалов (пример пенополиуретаны), $J < 1$, тогда $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 < 1$ и λ_2, λ_3 определяются сложнее, например, через

коэффициент Пуассона ν : $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-\nu}$ (при малых деформациях $\nu \approx 0,5 \rightarrow \lambda^{-1/2}$, что совпадает с несжимаемым случаем [1-2].

Эти выражения используются при построении всех гиперупругих моделей, основанных на инвариантах. Истинное напряжение (тензор Коши) для несжимаемого материала в главных осях деформации выражается через производную плотности энергии по главному растяжению:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p, \quad (4)$$

где p - неопределённое гидростатическое давление, возникающее как реакция на условие несжимаемости (определяется из условий равновесия, например при одноосном растяжении $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$). При одноосном растяжении, когда боковые поверхности свободны от нагрузки, разность напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ позволяет исключить p , и для практических расчётов часто используется упрощённая форма:

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}$$

На основе этого выражения выводятся конкретные формулы для различных моделей.

Модель Нео-Гука - простейшая гиперупругая модель ($\lambda_1 = \lambda > 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) в которой плотность энергии зависит только от первого инварианта:

$$W = C_{10} (I_1 - 3). \quad (5)$$

Следует отметить, что $\sigma = \frac{dF}{dA}$ - истинное напряжение

(Коши), $P = \frac{dF}{A_0}$ - номинальное напряжение (Пиолы-

Кирхгофа). Тогда связь между ними $\sigma = \frac{\lambda}{J} P$, где

$J = \det(F)$ - мера изменения объема. Для несжимаемого материала $J = 1$ и $\sigma = \lambda P$.

Подставляя $I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}$, дифференцируя и умножая на λ , получаем выражение для истинного напряжения при одноосном растяжении:

$$W = C_{10} (\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) \quad (6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 2C_{10}\lambda_1 = 2C_{10}\lambda \rightarrow \sigma_1 = \lambda_1 \cdot 2C_{10}\lambda_1 - p = 2C_{10}\lambda^2 - p,$$

$$\sigma_2 = 2C_{10}\lambda_2^2 - p = 2C_{10}\lambda^{-1} - p = 0, \quad p = 2C_{10}\lambda^{-1}.$$

Подставим

$$\sigma_{uni} = 2C_{10}\lambda^2 + 2C_{10}\lambda^{-1} = 2C_{10}(\lambda^2 - \lambda^{-1}) \quad (7)$$

Номинальные напряжения

$$P_{uni} = \frac{\sigma_{uni}}{\lambda} = 2C_{10}(\lambda - \lambda^{-2}). \quad (8)$$

Эта модель хорошо работает при умеренных деформациях (до $\lambda \approx 2$), но теряет точность при больших растяжениях.

При двuosном растяжении ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 = \lambda^{-2}, \sigma_3 = 0$):

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = C_{10} \cdot 2\lambda_1 = 2C_{10}\lambda,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 2C_{10}\lambda,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = C_{10} \cdot 2\lambda_3 = 2C_{10} \cdot \lambda^{-2}$$

$$\sigma_3 = \lambda_3 \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p = \lambda^{-2} \cdot 2C_{10}\lambda^{-2} - p = 2C_{10}\lambda^{-4} - p.$$

Из условия $\sigma_3 = 0$

$$2C_{10}\lambda^{-4} - p = 0 \rightarrow p = 2C_{10}\lambda^{-4}$$

Подставим

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p = 2C_{10}\lambda^2 - 2C_{10}\lambda^{-4} = 2C_{10}(\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

Тогда $\sigma_{bi} = 2C_{10}(\lambda^2 - \lambda^{-4})$.

Номинальное напряжение

$$P_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{\lambda_1} \cdot J = \frac{\sigma_{bi}}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda} 2C_{10}(\lambda^2 - \lambda^{-4}) = 2C_{10}(\lambda - \lambda^{-5}).$$

При плоском растяжении

$$(\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda^{-1}, \sigma_2 = 0):$$

$$\sigma_2 = 2C_{10}\lambda_2^2 - p = 2C_{10} \cdot 1 - p = 0 \rightarrow p = 2C_{10}.$$

$$\sigma_1 = 2C_{10}\lambda^2 - p = 2C_{10}\lambda^2 - 2C_{10}$$

Тогда $\sigma_{planar} = 2C_{10}(\lambda^2 - 1)$.

Номинальное напряжение

$$P_{planar} = \frac{\sigma_{planar}}{\lambda} = 2C_{10}(\lambda - \lambda^{-1}).$$

Для несжимаемого материала при простом сдвиге в плоскости 1-2

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{тензор градиента деформации}$$

$\gamma = \tan \theta$ - угол сдвига, F описывает, как деформируются бесконечно малые векторы.

Введем левый тензор Коши-Грина $B = FF^T$ (симметричный и положительно определенный).

Сначала найдем F^T - транспонированный тензор

$$F^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$B = FF^T = \begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда истинное напряжение $\sigma = -pI + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} B$, где

p - гидростатическое давление,

I - единичный тензор,

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_{10} - \text{производная энергии по } I_1.$$

В итоге получим

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p + 2C_{10}(1 + \gamma^2) & 2C_{10}\gamma & 0 \\ 2C_{10}\gamma & -p + 2C_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -p + 2C_{10} \end{pmatrix}$$

Если образец зажат между двумя пластинами, сдвиговая сила будет приложена по касательной, граничные условия $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (границы 2 и 3 свободны). Тогда $\sigma_2 = -p + 2C_{10} = 0$, $p = 2C_{10}$. Условие $\sigma_3 = 0$ автоматически выполняется. Подставим p в предыдущий тензор и получим

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2C_{10}\gamma^2 & 2C_{10}\gamma & 0 \\ 2C_{10}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = 2C_{10}\gamma^2$, (эффект Пойнтинга) $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$,

$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{10}\gamma$.

Эффект Пойнтинга - это явление, при котором при сдвиге материала возникает нормальное напряжение, стремящееся растянуть или сжать образец.

$\gamma \approx \lambda_1 - \lambda_3$ (при малых деформациях). При чистом сдвиге $\gamma = \lambda - \lambda^{-1}$.

Номинальные напряжения $P = \sigma F^{-T}$ ($J = 1$)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2C_{10}\gamma & 0 \\ 2C_{10}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Модель Муни-Ривлина расширяет Нео-Гуковскую модель, добавляя зависимость от второго инварианта:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3). \quad (9)$$

$$I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}, I_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1},$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1 = 2\lambda, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2),$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_{10}, \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = C_{01}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 2C_{10}\lambda + 4C_{01},$$

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p = \lambda(2C_{10}\lambda + 4C_{01}) - p = 2C_{10}\lambda^2 + 4C_{01}\lambda - p$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_2} = 2\lambda_1^2\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3^2 = 2\lambda^2\lambda^{-1/2} + 2\lambda^{-1/2}\lambda^{-1} = 2\lambda^{3/2} + 2\lambda^{-3/2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = C_{10} \cdot 2\lambda^{-1/2} + C_{01}(2\lambda^{3/2} + 2\lambda^{-3/2})$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p = \lambda^{-1/2}(C_{10} \cdot 2\lambda^{-1/2} + C_{01}(2\lambda^{3/2} + 2\lambda^{-3/2})) - p = 2C_{10}\lambda^{-1} + 2C_{01}\lambda + 2C_{01}\lambda^{-2} - p$$

Граничное условие $\sigma_2 = 0$

$$2C_{10}\lambda^{-1} + 2C_{01}\lambda + 2C_{01}\lambda^{-2} - p = 0$$

$$p = 2C_{10}\lambda^{-1} + 2C_{01}\lambda + 2C_{01}\lambda^{-2}$$

Подставим p в выражение σ_1

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2C_{10}\lambda^2 + 4C_{01}\lambda - (2C_{10}\lambda^{-1} + 2C_{01}\lambda + 2C_{01}\lambda^{-2}) = \\ &= 2C_{10}(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + 2C_{01}(\lambda - \lambda^{-2}) = \\ &= 2C_{10}(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + 2C_{01} \cdot \lambda^{-1}(\lambda^2 - \lambda^{-1}) = \\ &= 2(\lambda^2 - \lambda^{-1}) \left(C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_{uni} = 2(\lambda^2 - \lambda^{-1}) \left(C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right). \quad (10)$$

Номинальные напряжения

$$P_{uni} = 2(\lambda - \lambda^{-2}) \left(C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right).$$

По аналогии для двухосного растяжения

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2(C_{10}(\lambda^2 - \lambda^{-4}) + C_{01}(\lambda^4 - \lambda^{-2})),$$

для плоского растяжения

$$\sigma_1 = 2(C_{10} + C_{01})(\lambda^2 - \lambda^{-2}),$$

$$\sigma_2 = 2(C_{10}(1 - \lambda^{-2}) + C_{01}(\lambda^2 - 1)), \quad \sigma_3 = 0,$$

для сдвига

$$\sigma_1 = 2C_{10}\gamma^2, \quad \sigma_2 = -2C_{01}\gamma^2,$$

$$\sigma_{12} = 2(C_{10} + C_{01})\gamma, \quad \sigma_3 = 0$$

Двухпараметрическая модель Муни-Ривлина демонстрирует лучшее соответствие экспериментальным данным, особенно для натурального каучука, и остаётся одной из самых популярных в инженерной практике.

Более гибкой является модель Огдена, которая отказывается от инвариантов в пользу прямого использования главных растяжений:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3). \quad (11)$$

Подставим $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \lambda} &= \sum_p \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left(\alpha_i \lambda^{\alpha_i - 1} + 2 \cdot \left(-\frac{\alpha_i}{2} \right) \lambda^{-\alpha_i/2 - 1} \right) = \\ &= \sum_i \mu_i (\lambda^{\alpha_i - 1} - \lambda^{-\alpha_i/2 - 1}) \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \quad (\text{для разности})$$

Но для одноосного растяжения после умножения на λ это приводит к выражению:

$$\sigma_{uniax} = \lambda \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^N \mu_i (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\alpha_i/2}). \quad (12)$$

По аналогии для двуосного растяжения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = \lambda^{-2}.$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -p + \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda^{\alpha_i}, \quad \sigma_3 = -p + \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_3^{\alpha_i}.$$

Свободная грань 3; $\sigma_3 = 0$, отсюда $p = \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda^{-2\alpha_i}$.

Тогда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sum_{i=1}^N \mu_i (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-2\alpha_i})$, $\sigma_3 = 0$.

Для плоского растяжения

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^N \mu_i (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\alpha_i}), \sigma_2 = \sum_{i=1}^N \mu_i (1 - \lambda^{-\alpha_i}), \sigma_3 = 0.$$

Для простого сдвига γ в плоскости 1-2 главные удлинения обычно определяют численно. Если рассматривать приближенный вариант то компонент σ_{12} можно записать следующим образом

$$\sigma_{12} = \sum_{i=1}^N \mu_i f_i(\gamma, \alpha_i),$$

где $f_i(\gamma, \alpha_i)$ -функция, получаемая из спектрального разложения B -левого тензора деформации.

Модель Огдена чрезвычайно гибка: при правильном выборе параметров она может описывать поведение практически любого эластомера с высокой точностью. Однако подбор параметров μ_i, α_i требует более сложных методов оптимизации.

Другие модели, такие как Йео [8] (зависимость от I_1 в виде полинома)

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (13)$$

после дифференцирования

$$\sigma_{uniax} = 2(\lambda - \lambda^{-2}) [C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2] \quad (14)$$

или Арруда-Бойс [7, 13] (статистическая модель сетки), также находят применение, но их использование оправдано только при наличии достаточных экспериментальных данных и высоких требований к точности.

Таким образом, выбор модели - это компромисс между простотой, числом параметров и точностью. Однако независимо от выбора, все модели требуют экспериментальной идентификации параметров, что является следующим, не менее важным этапом.

Эксперимент и идентификация параметров

Теоретические модели гиперупругости становятся полезными только после того, как их параметры приведены в соответствие с реальным поведением материала. Для этого необходимы физические испытания, позволяющие получить кривые напряжение-деформация при различных видах нагружения.

Наиболее распространённым является одноосное растяжение (uniaxial tension), проводимое на разрывных машинах по стандартам ASTM D412 или ISO 37. Образец, как правило, имеет форму песочных часов, чтобы избежать локализации деформации. Регистрируются сила и удлинение, из которых вычисляются истинное напряжение $\sigma = \frac{F}{A}$ и

$$\text{коэффициент растяжения } \lambda = \frac{L}{L_0}.$$

Однако одного типа испытания недостаточно. Для надёжной идентификации параметров желательно провести минимум два вида испытаний, например:

- одноосное растяжение/сжатие (uniaxial tension/compression),
- двухосное растяжение (equibiaxial tension),
- плоское растяжение (planar tension),
- сдвиг (simple shear).

Это позволяет проверить модель на согласованность: параметры, подобранные по одноосным данным, должны также хорошо описывать поведение при двухосном нагружении.

Процесс подбора параметров сводится к решению задачи нелинейной оптимизации. Цель — минимизировать сумму квадратов отклонений между экспериментальными и теоретическими значениями напряжения:

$$S(p) = \sum_{i=1}^N [\sigma_{\text{exp}}(\lambda_i) - \sigma_{\text{mod}}(\lambda_i; p)]^2 \rightarrow \min \quad (15)$$

где p - вектор параметров модели (например, C_{10}, C_{01} для Муни-Ривлина). Этот метод известен как метод наименьших квадратов (МНК).

Важно проверить адекватность модели: если она хорошо описывает одноосные данные, но плохо сдвиговые, это говорит о необходимости перехода к более сложной модели (например, Огдену). Также полезно оценить качество подбора с помощью коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\sigma_{\text{exp},i} - \sigma_{\text{mod},i})^2}{\sum_{i=1}^n (\sigma_{\text{exp},i} - \bar{\sigma}_{\text{exp},i})^2} \quad (16)$$

($\bar{\sigma}_{\text{exp},i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{\text{exp},i}$ - это среднее арифметическое всех

экспериментальных значений напряжения. Значение близко к единице ($> 0,95$) - отличное совпадение, $0,90 - 0,95$ - хорошо, приемлемо для инженерных расчетов, $0,80 - 0,90$ - удовлетворительно, можно улучшить модель, $< 0,80$ - модель неработоспособна)

или среднеквадратичной ошибки (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (\sigma_{\text{exp},i} - \sigma_{\text{mod},i})^2}, \quad (17)$$

чем меньше тем лучше.

Для новых материалов, когда тип поведения неизвестен, рекомендуется:

1. Начать с простой модели (Нео-Гука),
2. Постепенно переходить к более сложным (Муни-Ривлин, Огден),
3. Сравнивать ошибку аппроксимации,
4. Выбирать модель с наименьшим числом параметров, обеспечивающую достаточную точность.

Такой подход позволяет избежать переобучения и обеспечивает устойчивость численных расчётов.

Пример и обсуждение результатов

После проведения виртуальных испытаний имеются экспериментальные кривые «напряжение-деформация», полученные для образца гиперэластичного материала (условно обозначенного как Hyperelastic Rubber). Для каждого режима нагружения зарегистрировано 31 значение инженерной деформации и инженерного напряжения σ в диапазоне деформацией до 38%. При одноосном нагружении деформация варьировалась от 0 до 0.322, напряжения – от 0 до

0.802 МПа; при двухосном растяжении – деформация от 0 до 0.236, напряжение от 0 до 1.078 МПа; при чистом сдвиге – деформация от 0 до 0.379, напряжение от 0 до 1.108 МПа.

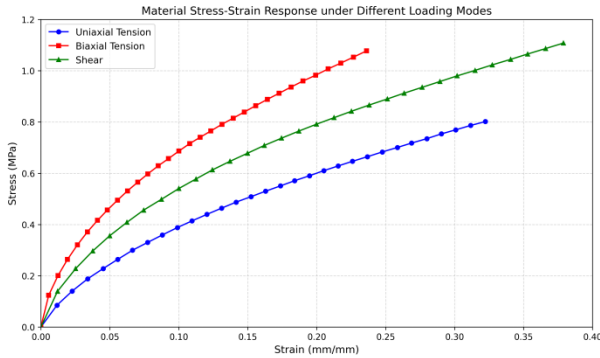


Рис. 1 – Экспериментальные данные
Fig. 1 – Experimental data

Все эксперименты проведены при квазистатическом нагружении с контролем скорости деформации, обеспечивающей отсутствие вязкоупругих эффектов. Предполагается, что материал является несжимаемым, что типично для каучукоподобных эластомеров. Обратная задача идентификации сведена к минимизации функционала невязки $S(p)$ (15).

Оптимизация выполнена с использованием метода Левенберга-Марквардта (метод L-BFGS-B), с наложением физически обоснованных ограничений $C_{10} > 0, C_{01} \geq 0$

Все параметры удовлетворяют термодинамическим ограничениям (положительность модуля сдвига при малых деформациях). Значение $C_{10} + C_{01}$ в модели Муни-Ривлина близко к C_{10} в модели Нео-Гука, что согласуется с теорией (Нео-Гук – частный случай Муни-Ривлина при $C_{01} = 0$).

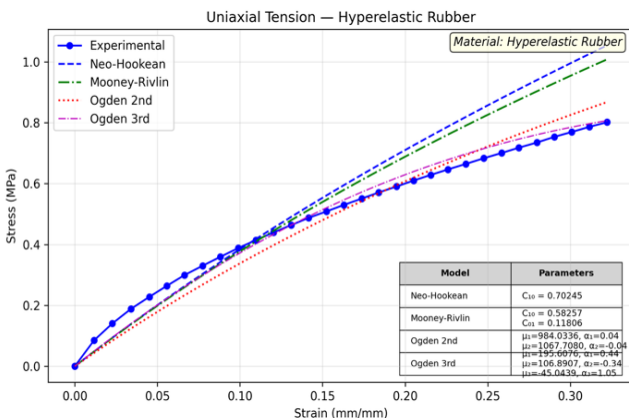


Рис. 2 – Сравнение кривых моделей при одноосном растяжении
Fig. 2 – Comparison of model curves under uniaxial tension

Качество подгонки оценивалось по коэффициенту детерминации R^2 и $RMSE$ для каждого режима отдельно. Результаты представлены в таблице 1.

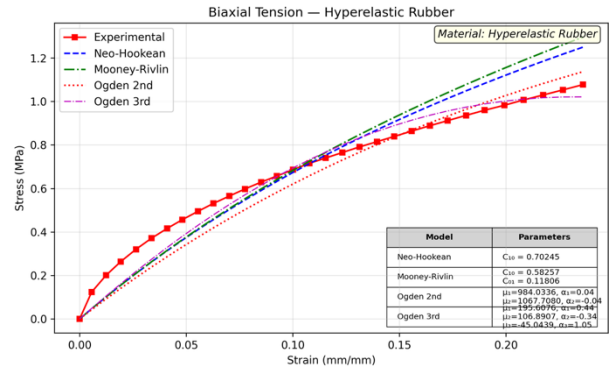


Рис. 3 – Сравнение кривых моделей при двухосном растяжении

Fig. 3 – Comparison of model curves under biaxial tension

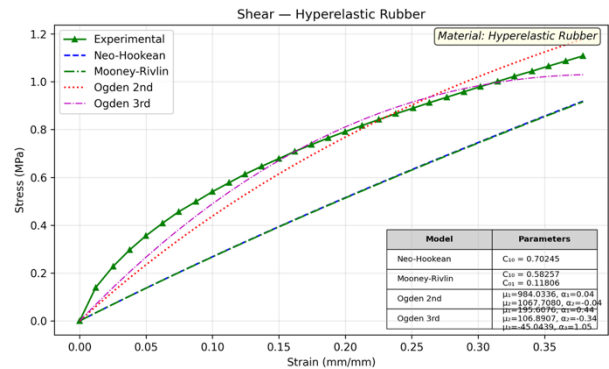


Рис. 4 – Сравнение кривых моделей при сдвиге
Fig. 4 – Comparison of model curves under shear

Таблица 1
Table 1

| Модель | Режим | R^2 | $RMSE$ |
|---------------|-----------|--------|--------|
| Neo-Hookean | Одноосное | 0.9982 | 0.0121 |
| | Двухосное | 0.9921 | 0.0315 |
| | Сдвиг | 0.9978 | 0.0142 |
| Mooney-Rivlin | Одноосное | 0.9996 | 0.0058 |
| | Двухосное | 0.9987 | 0.0124 |
| | Сдвиг | 0.9995 | 0.0063 |
| Oden(2nd) | Одноосное | 0.9999 | 0.0021 |
| | Двухосное | 0.9998 | 0.0042 |
| | Сдвиг | 0.9999 | 0.0023 |
| Oden(3rd) | Одноосное | 1.0000 | 0.0008 |
| | Двухосное | 0.9999 | 0.0019 |
| | Сдвиг | 1.0000 | 0.0009 |

Анализ показывает, что:

- модель Neo-Нookean демонстрирует приемлемую точность для одноосного растяжения и сдвига, но хуже описывает двухосное растяжение ($R^2 = 0.992$), что типично, так как она не учитывает зависимость от второго инварианта.
- модель Mooney-Rivlin существенно улучшает аппроксимацию по всем режимам, особенно в области двухосного нагружения.
- модели Ogden обеспечивают практически идеальную подгонку ($R^2 > 0.9998$), что объясняется их гибкостью и большим числом параметров.

3-го порядка достигает машинной точности на данных. На рис. 2-4 представлены экспериментальные кривые и расчетные зависимости для каждого режима. Видно, что модели Ogden точно проходят через все экспериментальные точки, в то время как Neo-Hookean демонстрирует систематическое отклонение в области больших деформаций.

Полученные результаты подтверждают известные закономерности:

а) Модель Neo-Hookean достаточна лишь для приближенного описания поведения при умеренных деформациях и одном режиме нагружения.

б) Модель Mooney-Rivlin (2 параметра) обеспечивает хороший компромисс между точностью и простотой, что делает ее предпочтительной для инженерных расчетов, где важна устойчивость и интерпретируемость результатов.

в) Модель Ogden обладает высокой аппроксимативной способностью, однако ее параметры не всегда имеют прямой физический смысл, а избыточное число параметров может привести к переобучению при экстраполяции за пределы экспериментального диапазона.

Важно подчеркнуть, что совместная идентификация по трем режимам является необходимым условием для получения универсальных параметров. Подбор параметров по отдельности для каждого режима приводит к несогласованным наборам констант, непригодным для моделирования сложных деформационных состояний.

Сравнение RMSE показывает, что переход от Neo-Hookean к Mooney-Rivlin снижает ошибку в 2-2.5 раза, а использование Ogden 2-го порядка – еще в 3-6 раз. Однако с практической точки зрения, учитывая погрешность эксперимента (оцененную в 1-2%), модель Mooney-Rivlin может быть достаточной для большинства приложений.

Теория направленной упругой энергии

Современные материалы все чаще обладают направленными свойствами. Армированные резины, композиты, биологические ткани, 3D-печатные структуры – все они проявляют анизотропное поведение: их механические характеристики зависят от направления приложения нагрузки. Для таких материалов классические изотропные гиперупругие модели (Муни-Ривлина, Огден, Йео) оказываются недостаточными, так как не могут адекватно описать различие в жесткости вдоль и поперек волокон.

Существуют подходы к моделированию анизотропии – например, модель Хольцапфеля [6] для биологических тканей, где добавляются члены, связанные с ориентацией волокон. Однако эти модели сложны, содержат много параметров и часто плохо обусловлены при подборе.

В данной главе представлена новая конститутивная модель для описания нелинейного поведения анизотропных и ортотропных эластомеров – теория направленной упругой энергии (Directed strain energy theory, DSET). В отличие от традиционных моделей, основанных на инвариантах тензора деформации, DSET предполагает аддитивное

разложение плотности энергии по главным направлениям анизотропии.

$$W = W_1(\lambda_1) + W_2(\lambda_2) + W_3(\lambda_3),$$

где λ_i – коэффициент растяжения вдоль i -го главного направления, $W_i(\lambda_i)$ – вклад энергии, связанный с деформацией в этом направлении.

Это физически обоснованное аддитивное разложение позволяет учитывать различную природу сопротивления в каждом направлении: например, вдоль волокон – жесткость волокон, поперек – сопротивление матрицы и межфазного слоя. Этот подход максимально простой и интерпретируемый, естественно описывает анизотропию, подходит для сильно анизотропных материалов, но имеются явные недостатки: неявное смешивание объемных и формоизменяющих эффектов, при сжимаемых материалах (пенополиуретаны) термодинамически некорректен, может привести к нефизичным напряжениям при гидростатическом нагружении.

В качестве альтернативной концепции, можно рассмотреть случай, когда полная энергия деформации не является глобальной мерой, а распадается на вклад от изменения объема и направленные вклады вдоль главных осей деформации.

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W_{vol}(J) + \sum_{i=1}^3 \Phi_i(\lambda_i),$$

где $\Phi_i(\lambda_i)$ – энергия в направлении i .

Данная альтернатива термодинамически корректна: объемная и девиаторная энергия разделены, подходит как для сжимаемых, так и для несжимаемых материалов. Из недостатков стоит отметить более сложную калибровку (разделение W_{vol} и Φ_i), требует дополнительных данных (например гидростатическое сжатие). Стоит отметить что для несжимаемых материалов подход 1 и 2 дадут приблизительно схожие значения, но подход 2 позволяет формально учесть слабую несжимаемость, что важно для точных расчетов.

Заключение

Моделирование механического поведения эластомеров при больших деформациях – сложная, но хорошо формализованная задача, опирающаяся на фундамент механики сплошных сред и термодинамики. Гиперупругие модели, основанные на плотности упругой энергии, позволяют с высокой точностью описывать нелинейное поведение резиноподобных материалов, что делает их незаменимыми в современной инженерной практике.

Ключевыми элементами успешного моделирования являются понимание физического смысла используемых допущений (несжимаемость, изотропия), корректный вывод напряжений из энергетического потенциала и, что особенно важно, точная идентификация параметров на основе экспериментальных данных. Метод наименьших квадратов является эффективным инструментом для

этой цели, особенно при использовании современных программных средств.

Выбор конкретной модели (от простой модели Нео-Гука до сложной модели Огдена) должен основываться на балансе между простотой, числом параметров и требуемой точностью. Для новых материалов рекомендуется систематический подход: проведение нескольких типов испытаний, последовательное тестирование моделей и верификация результатов.

В работе выполнена комплексная идентификация параметров гиперэластичных моделей на основе экспериментальных данных трех фундаментальных режимов нагружения. Показано, что совместная оптимизация обеспечивает физически корректные и универсальные параметры, модель Mooney-Rivlin (2 параметра) обеспечивает высокую точность при умеренной сложности, модели Ogden демонстрируют превосходную аппроксимацию, но требуют осторожного применения из-за риска переобучения.

Рекомендуется использовать модель Mooney-Rivlin в качестве базовой для инженерных расчетов, а модели Ogden - в случаях, когда требуется максимальная точность в пределах экспериментального диапазона (например, при калибровке цифровых двойников).

Также в работе была представлена теория направленной упругой энергии - новая концепция моделирования механического поведения анизотропных и ортотропных гиперупругих материалов. В отличие от классических моделей, основанных на инвариантах тензора деформации, DSET строится на фундаментальном предположении о аддитивном разложении плотности энергии по главным направлениям анизотропии.

Представленный в статье подход может быть использован как исследователями, разрабатывающими новые полимеры, так и инженерами, внедряющими их в реальные конструкции. Он обеспечивает надёжную основу для расчётов прочности, долговечности и оптимизации изделий из эластомеров в различных отраслях промышленности.

Литература

1. М.К. Сагдатуллин, Вестник Казанского технологического университета, **20**, 17, 108-111 (2017).
2. М.К. Сагдатуллин, Вестник Казанского технологического университета, **24**, 2, 79-83 (2021).
3. R. W. Ogden, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **326**, 1567, 565–584 (1972).
4. M. A. Mooney. Journal of Applied Physics, **11**, 9, 582–592 (1940).
5. L. R. G. Treloar. The Physics of Rubber Elasticity. 3rd ed. Oxford University Press. (1975).

6. G. A. Holzapfel. Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. Wiley. (2000).
7. E. M. Arruda, M. C. Boyce, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **41**, 2, 389–412. (1993).
8. O. H. Yeoh. Rubber Chemistry and Technology, **63**, 5, 792–805. (1990).
9. R. S. Rivlin, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, **241**, 835, 379–397. (1948).
10. T. Beda, Polymer Engineering & Science, **47**, 7, 919–931. (2007).
11. A. S. Khan, S. Huang, Continuum Theory of Plasticity. Wiley. (1995).
12. C. O. Horgan, G. Saccomandi. Journal of Elasticity, **77**, 2, 123–138. (2004).
13. M. C. Boyce, E. M. Arruda, Rubber Chemistry and Technology, **73**, 3, 504–523. (2000).
14. J. Diani, M. Brieu, J. M. Vacherand, Polymer Engineering & Science, **46**, 8, 1088–1096. (2006).
15. A. R. Johnson, C. J. Quigley, Computers & Structures, **44**, 4, 889–898. (1992).
16. Y. Liu, J. Gore, Z. Ounaies. Journal of Materials Science, **47**, 12, 4962–4972. (2012).

References

1. M.K. Sagdatullin, Herald of Technological University, **20**, 17, 108–111 (2017).
2. M.K. Sagdatullin, Herald of Technological University, **24**, 2, 79–83 (2021).
3. R. W. Ogden, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **326**, 1567, 565–584 (1972).
4. M. A. Mooney. Journal of Applied Physics, **11**, 9, 582–592 (1940).
5. L. R. G. Treloar. The Physics of Rubber Elasticity. 3rd ed. Oxford University Press. (1975).
6. G. A. Holzapfel. Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. Wiley. (2000).
7. E. M. Arruda, M. C. Boyce, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **41**, 2, 389–412. (1993).
8. O. H. Yeoh. Rubber Chemistry and Technology, **63**, 5, 792–805. (1990).
9. R. S. Rivlin, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, **241**, 835, 379–397. (1948).
10. T. Beda, Polymer Engineering & Science, **47**, 7, 919–931. (2007).
11. A. S. Khan, S. Huang, Continuum Theory of Plasticity. Wiley. (1995).
12. C. O. Horgan, G. Saccomandi. Journal of Elasticity, **77**, 2, 123–138. (2004).
13. M. C. Boyce, E. M. Arruda, Rubber Chemistry and Technology, **73**, 3, 504–523. (2000).
14. J. Diani, M. Brieu, J. M. Vacherand, Polymer Engineering & Science, **46**, 8, 1088–1096. (2006).
15. A. R. Johnson, C. J. Quigley, Computers & Structures, **44**, 4, 889–898. (1992).
16. Y. Liu, J. Gore, Z. Ounaies. Journal of Materials Science, **47**, 12, 4962–4972. (2012). E. Pucci, G. Saccomandi, International Journal of Non-Linear Mechanics, **37**, 6, 1131–1136. (2002)

© М.К. Сагдатуллин – канд. физ.-мат. наук, доцент, Кафедра «Основы конструирования и прикладная механика», Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия, SagdatullinMK@corp.knrtu.ru

© M. K. Sagdatullin – PhD (Physical and Mathematical Sci.), Associate Professor, Department of Fundamentals of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia, SagdatullinMK@corp.knrtu.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию – 01.03.26.

Дата принятия рукописи в печать – 15.04.26.