УДК 51-74 DOI 10.55421/3034-4689_2026_29_5_98

Н. В. Антипина

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА

Ключевые слова: робот-манипулятор, оптимальное импульсное управление, разрывные траектории, необходимые условия оптимальности, обобщенный принцип максимума, оптимизация по быстродействию.

Статья посвящена исследованию прикладной модели из области робототехники, которая математически формализуется как вырожденная задача оптимального управления с разрывными траекториями. Инструментом исследования являются необходимые условия оптимальности первого порядка в форме обобщенного принципа максимума и условия Келли. Целью исследования является анализ вырожденной задачи оптимального управления движением робота-манипулятора с двумя звеньями и тремя степенями свободы. Задача характеризуется линейной зависимостью динамики робота от управляющих воздействий, что исключает возможность применения классического принципа максимума Понтрягина и требует перехода к теории импульсного управления. В качестве объекта исследования выступает робот-манипулятор с двумя звеньями, одно из которых переменной длины (телескопическое). Его кинетическая энергия описывается вырожденной квадратичной формой скоростей. Уравнения движения выводятся из уравнений Лагранжа и приводятся к аффинной по управлению системе дифференциальных уравнений. Последняя представляет собой так называемую систему с дефицитом управления, поскольку число степеней свободы в ней превосходит число управляющих воздействий. Для качественного анализа задачи применяются методы теории оптимального импульсного управления в форме принципа максимума для обобщенных импульсных процессов и траекторий ограниченной вариации. В ходе проведенного исследования модели получен синтез нелинейного закона импульсного управления роботом-манипулятором с учетом энергосбережения. Кроме того, доказано, что структура этого управления характеризуется наличием двух импульсов. Полученное решение задачи в классе импульсных процессов демонстрирует, что для достижения предельного быстродействия в системах с дефицитом управления характерно скачкообразное изменение скоростей. Результаты работы могут найти применение при проектировании энергоэффективных алгоритмов управления быстродействующими промышленными роботами и медицинскими манипуляторами.

N. V. Antipina

OPTIMIZATION OF ROBOTIC ARM MOTION CONTROL

Keywords: robotic manipulator, optimal impulse control, discontinuous trajectories, necessary optimality conditions, generalized maximum principle, performance optimization.

This article examines an applied model in the field of robotics, which is mathematically formalized as a degenerate optimal control problem with discontinuous trajectories. The analysis relies on first-order optimality conditions in the form of the generalized maximum principle and the Kelly conditions. The aim of the study is to analyze a degenerate optimal control problem for the motion of a two-link robotic manipulator with three degrees of freedom. The problem is characterized by a linear dependence of the robot's dynamics on control inputs, which precludes the application of the classical Pontryagin maximum principle and requires a transition to impulse control theory. The object of study is a two-link manipulator robot, one of whose links is of variable length (telescopic). Its kinetic energy is described by a degenerate quadratic form of velocities. The equations of motion are derived from the Lagrangian equations and reduced to an affine system of differential equations with respect to control. The latter constitutes a so-called undercontrolled system, since the number of degrees of freedom in it exceeds the number of control inputs. For a qualitative analysis of the problem, methods of optimal impulse control theory are applied in the form of the maximum principle for generalized impulse processes and trajectories of limited variation. In the course of the study of the model, a synthesis of a nonlinear impulse control law for a robotic manipulator was obtained, taking energy conservation into account. Furthermore, it is proven that the structure of this control is characterized by the presence of two impulses. The solution obtained for the problem in the class of impulse processes demonstrates that, to achieve maximum speed in systems with a control deficit, a step-like change in velocities is characteristic. The results of this work can be applied in the design of energy-efficient control algorithms for high-speed industrial robots and medical manipulators.

Введение

Современный этап развития промышленной и сервисной робототехники характеризуется переходом к высокоскоростным и энергосберегающим технологическим процессам. Роботы-манипуляторы, функционирующие в составе гибких производственных ячеек, медицинских комплексов или космических аппаратов могут применяться в труднодоступных или опасных для человека местах. Их внедрение, например, в химической отрасли обеспечивает защиту человека от токсичных веществ, экстремального температурного режима, радиации, высокую точность операций, ускорение лабораторных исследований и оптимизацию промышленных процессов в целом.

Манипулятор – это механическая система, состоящая из нескольких звеньев, соединенных шарнирами. Математически движение манипуляторов формализуется в виде сложных систем дифференциальных уравнений. а управление ими – в виде обобщенных, импульсных воздействий [1].

Изучение влияния импульсных воздействий на системы, рассматриваемые в различных прикладных областях, актуально в течение последних пятидесяти лет [2-8]. Причина использования импульсного управления перемещением манипуляторов обусловлена тем, что управляющие воздействия на них фактически приходятся на моменты времени, которые по длительности малы по сравнению с промежутками времени, потраченными на само их перемещение [1]. Формализация этих воздействий и приводит к наличию дельта-функций [9] в структуре управлений, в момент воздействия которых скорости звеньев манипулятора изменяются скачком.

Классическая теория оптимального управления такими объектами базируется на принципе максимума Л.С. Понтрягина и методе динамического программирования Р. Беллмана [10,11]. Однако в прикладных задачах нередко встречаются ситуации, когда уравнения движения оказываются линейными относительно части управляющих воздействий, а функционал качества не зависит явно от их величины. В частности, примером может служить задача управления манипулятором с изменяемой геометрией звеньев, где силы и моменты, развиваемые приводами, могут быть формально не ограничены, а динамика системы допускает мгновенное изменение конфигурации [12]. Подобные постановки классифицируются как вырожденные (нерегулярные) [10, 13-15].

Применение стандартных необходимых условий оптимальности в таких задачах приводит к тривиальным или разрывным решениям, не имеющим физического смысла в классе абсолютно непрерывных функций. Как показано в работах В.И. Гурмана, В.Ф. Кротова, В.А. Дыхты [9, 10, 14], для адекватного описания подобных процессов необходимо расширение исходной задачи на класс импульсных управлений и траекторий ограниченной вариации. Математически это соответствует замене обычных управлений обобщенными функциями (мерами), а траекторий – функциями, допускающими скачки.

Под импульсным управлением понимается распределение вида $v = Dw$, где D – оператор обобщенного дифференцирования, а w – измеримая ограниченная функция [9]. Такие управления возникают при расширении классических задач динамической оптимизации с неограниченным множеством управлений, в которых экстремум в классе обычных измеримых управлений и абсолютно непрерывных траекторий не достигается [14]. В частности, при наличии полуограниченного управления $u \geq 0$ расширенный класс импульсных управлений состоит из неотрицательных мер Стильтьеса $v = Dw$, где w – функция ограниченной вариации.

Цель исследования – разработка оптимального по быстродействию управления движением робота-манипулятора. Требуется синтезировать закон управления такой механической системой, который обеспечивает минимальное время переходного состояния, при наличии ограничений на ускорения звеньев.

Описание и формализация модели

Рассматривается управляемая механическая система, состоящая из невесомого стержня OA фиксированной длины $l > 0$, вращающегося в вертикальной плоскости вокруг неподвижного шарнира O. Посредством цилиндрического шарнира в точке A к стержню прикреплен второй невесомый стержень AB переменной длины $r(t)$. Масса всей системы считается сосредоточенной в точках A и B, что соответствует массам m_1 и m_2. Для упрощения выкладок допустим, что выполняется условие $l = 1$. Влиянием сил трения в шарнирах и поступательной паре, обеспечивающей изменение длины стержня AB, можно пренебречь.

Конфигурационное пространство описанной системы описывается вектором обобщенных координат $q = (\theta, \varphi, r)$. Здесь θ и φ – угол поворота первого звена относительно вертикали и относительный угол между звеньями OA и AB соответственно, $r = r(t)$ – длина звена AB. Таким образом, рассматривается двузвенный манипулятор с тремя параметрами свободы: углами θ и φ и длиной одного из звеньев $r(t)$ [12].

Движение робота-манипулятора описывается следующей системой:

$$\begin{gathered}\alpha_{11}(\varphi)\ddot{\theta} + \alpha_{12}(\varphi)\ddot{\varphi} = U_1 + U_2,\\ \alpha_{12}(\varphi)\ddot{\theta} + \alpha_{22}\ddot{\varphi} = U_2,\end{gathered} \tag{1}$$

в которой

$$\alpha_{11}(\varphi) = (m_1 + m_2)l^2 + m_2r^2 + 2m_2lrcos\varphi,$$
$$\alpha_{12}(\varphi) = m_2r^2 + m_2lrcos\varphi,$$
$$\alpha_{22} = m_2r^2,$$

U_1, U_2 – управляющие воздействия, приложенные к шарнирам.

Уравнение динамики мощности имеет вид:

$$\dot{A} = (U_1 + U_2)\dot{\theta} + U_2\dot{\varphi}. \tag{2}$$

Поставим задачу– найти изменения управляющих моментов U_1, U_2, обеспечивающие наименьшие энергетические затраты $A(T)$ на перемещение робота-манипулятора из начального состояния $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ в конечное – $\theta(T) = \theta_T$, $\dot{\theta}(T) = 0$, $\varphi(T) = \varphi_T$, $\dot{\varphi}(T) = 0$ [12].

Для приведения задачи к более компактному виду введем обозначения: для фазовых переменных – $x = (x_1, x_2) = (\theta, \varphi)$, $y = (y_1, y_2) = (\dot{\theta}, \dot{\varphi})$, $z = A$, для управлений – $u = (u_1, u_2) = (\ddot{\theta}, \ddot{\varphi})$,
и симметрическую матрицу

$$B(x) = B(x_2) = \begin{pmatrix}\alpha_{11}(\varphi) & \alpha_{12}(\varphi)\\ \alpha_{12}(\varphi) & \alpha_{22}\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что она положительно определена (см. (1)).

Исключая управляющие моменты U_1, U_2 из системы (1), запишем поставленную задачу в виде

$$\begin{gathered} z(T) \to inf,\\ \dot{x} = y, \qquad x(0) = 0, x(T) = x_T,\\ \dot{y} = u, \qquad y(0) = y(T) = 0,\\ \dot{z} = \langle B(x)y, u\rangle, \quad z(0) = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $x_0 = (\theta_0, \varphi_0)$, $x_T = (\theta_T, \varphi_T)$.

Далее рассмотрим задачу (3), предполагая что управления $u = (u_1, u_2)$ являются импульсными.

Легко проверить, что в данной модели выполняется условие Фробениуса [10]:

$$G_x^1G^2 = G_x^2G^1 = (0,0,0,0,\alpha_{12}),$$

что позволяет применить обобщенный принцип максимума [9, 10].

Исследование модели

Запишем функцию Гамильтона для задачи (3)

$$H = \langle \psi_x, y\rangle + \langle \psi_y, u\rangle + \psi_z\langle B(x)y, u\rangle,$$

где $\psi = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ – вектор сопряжённых переменных, и на ее основе – условия стационарности

$$H_u = \psi_y + B(x)y \text{ на } [0, T], \quad (4)$$

$$\dot{H}_u = \dot{\psi}_y - (B(x)y)_x\dot{x} - B(x)\dot{y} = \\ = -\psi_x - (B(x)y)_x y \text{ на } (0, T). \quad (5)$$

Из автономности задачи следует условие постоянства

$$H_0 = \langle\psi_x, y\rangle = C_1 = const \text{ на } (0, T). \quad (6)$$

Анализ необходимых условий оптимальности управления дал следующие результаты:

1) Экстремали задачи нормальны, поэтому в условиях (4)-(6) $\alpha_0 = 1$, $\psi_z \equiv -1$ на отрезке $[0, T]$.

2) При $t \in (0, T)$ траектории проходят по особой поверхности фазового пространства, заданной уравнениями, полученными из соотношений (5) и (6),

$$\langle y, (B(x)y)_x y\rangle = y_1 y_2 (y_1 + y_2) sin x_2 = C_1, \quad (7)$$

$$m_2 r_1 r_2 y_2 (2y_1 + y_2) sin x_2 = C_2. \quad 8)$$

3) Внутри промежутка $(0, T)$ имеет место интервал Δ особости управления u, на котором оно не содержит импульсов.

4) Дифференцирование условия (6) по переменной t ($\ddot{H}_u = 0$) приводит к системе из двух линейных алгебраических уравнений с вектором неизвестных $u = (u_1, u_2)$

$$M(x, y)u = l(x, y). \quad (9)$$

Здесь $l(x, y) = -m_2 r_1 r_2 cos x_2 \begin{pmatrix} y_2^2(2y_1 + y_2) \\ y_1 y_2^2 \end{pmatrix}$,

$$M(x, y) = (\ddot{H}_u)_u = \\ = -2m_2 r_1 r_2 sin x_2 \begin{pmatrix} y_2 & y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 & y_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Исследование на оптимальность особого управления на интервале Δ связано с выполнением обобщенного условия Келли для импульсно-особых экстремалей [15], или, а именно, с неотрицательной определенностью матрицы (10) на этом интервале.

Это условие имеет место либо при $sin x_2 \geq 0$, либо при $sin x_2 \leq 0$, причем, в силу невырожденности матрицы $M(x, y)$,

$$sin x_2 \neq 0, \quad y = (y_1, y_2) \neq (0,0). \quad (11)$$

При выполнении этих требований совместная система (9) в качестве ее единственного решения дает синтезирующее управление на особой поверхности (7), (8) [3]

$$\bar{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \bar{u}_1(x, y) \\ \bar{u}_2(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2(y_1 y_2 - (y_1 + y_2)^2)} \times \\ \times \begin{pmatrix} -y_1^2 y_2^2 ctg x_2 \\ y_2^2(y_1^2 + (y_1 + y_2)^2) ctg x_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

5) задача (3) имеет решение только при выполнении строгого условия Келли (то есть при положительной определенности матрицы (10)), что обеспечивается условиями

$$x_2(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad y(t) < 0 \text{ на } \Delta, \quad (13)$$

причем $\bar{u}_1 < 0$, $\bar{u}_2 > 0$ на особой поверхности (7), (8).

6) Пункт 4) влечет, что начальная и конечная точки траектории не лежат на особой поверхности (7), (8), что говорит о наличии терминальных импульсов экстремального управления.

7) при выполнении условия (13) получена структура единственной экстремали: за счет импульса управления величины $u_0 < 0$ в начальный момент времени $t = 0$ фазовая компонента $y(t)$ претерпевает разрыв со скачком $y(0+) < 0$ (компонента x при этом остается непрерывной). Величина импульса u_0 управления находится из условия: компонента траектории $x(t)$ к моменту времени $t = T$ должна стать равной x_T, а компонента $y(t)$ в этот же момент конечным импульсом величины $u_T > 0$ из положения $y(T - 0)$ мгновенно перебрасывается скачком в конечное значение $y(T) = 0$. Тем самым, граничные условия задачи (3) выполнены. Заметим, что для найденной экстремали существует минимизирующая последовательность обычных допустимых управлений, аппроксимирующих терминальные импульсные воздействия.

8) при нарушении условия (13) исключается существование экстремалей, вырожденных по обеим компонентам управления или по одной из них. Полученное решение задачи (3) является процессом с разрывными траекториями и импульсным управлением, поскольку компоненты управления фактически представляют собой производные от скоростей и могут принимать граничные значения сколь угодно долго, что не противоречит законам механики и соответствует мгновенному приложению ударной силы. В реальной механической системе это интерпретируется как приложение предельно допустимого по прочности конструкции ускорения [1].

Заключение

Проведенное исследование иллюстрирует эффективность приложения теории оптимального импульсного управления для решения задач управления роботами-манипуляторами. Практическая значимость полученных результатов заключается в обосновании возможности использования режимов импульсного быстродействия (или энергосбережения) для манипуляторов в промышленной сфере, химико-фармацевтическом производстве, медицине. Предложенный подход может быть распространен на более сложные кинематические схемы, включая избыточные манипуляторы и системы с упругими сочленениями. Перспективными направлениями дальнейших исследований представляются доказательство оптимальности полученной экстремали, а также решение задач управления манипуляторами с более сложными характеристиками и синтез регуляторов, реализующих кусочно-постоянные управления с переключениями, аппроксимирующие найденные импульсные режимы с учетом реальных ограничений на мощность приводов.

Литература

1. А.М. Формальский, *Перемещение антропоморфных механизмов.* Наука, Москва, 1982. 368 с.
2. С.В. Доронин, Р.В. Зеленов, Е.М. Рейзмунт, А.П. Черняев, *System Analysis & Mathematical Modeling*, **5**, 4, 392-408 (2023). DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(4).392-408.

3. R.G. Mukharlyamov, Zh. K. Kirgizbaev, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2(114), 165-177 (2024). DOI 10.31489/2024M2/165-177.
4. Б.В. Довбня, *System Analysis & Mathematical Modeling*, **4**, 3, 232-249. DOI 10.17150/2713-1734.2022.4(3).232-249.
5. В.А. Пархомов, В.В. Сафаргалеев, Р.А. Рахматулин, Л.В. Казанцев, *Известия Байкальского государственного университета,* **32**, 1, 170-180 (2022). DOI 10.17150/2500-2759.2022.32(1).170-180.
6. В.А. Дыхта, *Автоматика и телемеханика*, 11, 100-113 (1999).
7. Р.А. Марчук, *System Analysis & Mathematical Modeling*, **7**, 1, 124-133 (2025). DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(1).124-133.
8. L. Gollmann, H. Maurer, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **10**, 2. 413-441 (2014). DOI 10.3934/jimo.2014.10.413.
9. В.А. Дыхта, О.Н. Самсонюк, *Оптимальное импульсное управление с приложениями.* Физматлит, Москва, 2000. 256 с.
10. В.Ф. Кротов, В.И. Гурман, *Методы и задачи оптимального управления.* Наука, Москва, 1973. 448с.
11. A.A. Milyutin, *CRC Research Notes in Mathematics Series*, Chapman and Hall, Haifa, 1999. Pp.159-172.
12. С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин, *Импульсные процессы: модели и приложения.* Наука, Москва, 1991. 256 с.
13. Л.Т. Ащепков, *Оптимальное управление разрывными системами.* Наука, Новосибирск, 1987. 226 с.
14. В.И. Гурман, *Принцип расширения в задачах оптимального управления*. Наука, Москва, 1997. 288 с.
15. В.А. Дыхта, *Сиб. мат. журн.*, **35**, 1, 70-82 (1994).

References

1. A.M. Formal'skiy, *Movement of Anthropomorphic Mechanisms*. Nauka, Moscow, 1982. 368 p.
2. S.V. Doronin, R.V. Zelenov, E.M. Reyzmunt, A.P. Chernyaev, *System Analysis & Mathematical Modeling*, **5**, 4, 392–408 (2023). DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(4).392–408
3. R.G. Mukharlyamov, Zh. K. Kirgizbaev, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2 (114), 165-177 (2024). DOI 10.31489/2024M2/165-177
4. B. V. Dovbnja, *System Analysis & Mathematical Modeling*, **4**, 3, 232–249. DOI 10.17150/2713-1734.2022.4(3).232–249
5. V.A. Parkhomov, V.V. Safargaleev, R.A. Rakhmatulin, L.V. Kazantsev, *Bulletin of Baikal State University*, **32**, 1, 170-180 (2022). DOI 10.17150/2500-2759.2022.32(1).170-180
6. V.A. Dykhta, *Avtomatika i Telemekhanika*, 11, 100-113 (1999).
7. R.A. Marchuk, *System Analysis & Mathematical Modeling*, **7**, 1, 124-133 (2025). DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(1).124-133
8. L. Gollmann, H. Maurer, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **10**, 2, 413-441 (2014).
9. V.A. Dykhta, O.N. Samsonyuk, *Optimal Impulse Control with Applications*. Fizmatlit, Moscow, 2000, 256 p.
10. V.F. Krotov, V.I. Gurman, *Methods and Problems of Optimal Control*. Nauka, Moscow, 1973, 448 p.
11. A.A. Milyutin, *CRC Research Notes in Mathematics Series*, Chapman and Hall, Haifa, 1999, pp. 159–172.
12. S.T. Zavalishchin and A. N. Sesekin, *Impulse Processes: Models and Applications*, Nauka, Moscow, 1991, 256 p.
13. L.T. Ashchepkov, *Optimal Control of Discontinuous Systems*, Nauka, Novosibirsk, 1987, 226 p.
14. V.I. Gurman, *The Extension Principle in Optimal Control Problems*, Nauka, Moscow, 1997, 288 p.
15. V.A. Dykhta, *Siberian Math. J.*, **35**, 1, 70–82 (1994).

© **Н. В. Антипина** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, Иркутск, Россия, natant2012@mail.ru.

© N. V. Antipina – PhD (Physical and Mathematical Sci.), Associate Professor of the Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russia, natant2012@mail.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию – 23.04.26.
Дата принятия рукописи в печать – 26.05.26.